

Sveučilište u Zagrebu  
Fakultet strojarstva i brodogradnje

# **ZAVRŠNI RAD**

Mentor:

Prof. Dr. Sc. Hinko Wolf

Domagoj Topličanec

Zagreb, 2014.

Sveučilište u Zagrebu  
Fakultet strojarstva i brodogradnje

# **ZAVRŠNI RAD**

Domagoj Topličanec

Zagreb, 2014.

Izjavljujem da sam ovaj rad izradio samostalno koristeći stečena znanja tijekom studija i navedenu literaturu.

Zahvaljujem se svom mentoru prof. dr. sc. Hinku Wolfu na strpljenju, ustupljenoj literaturi i korisnim savjetima tijekom izrade rada.

Isto tako se zahvaljujem svojoj obitelji na iskazanoj potpori i razumijevanju tijekom izrade završnog rada.

Domagoj Topličanec

# SADRŽAJ

POPIS SLIKA .....	III
POPIS TABLICA.....	V
POPIS OZNAKA .....	VI
SAŽETAK.....	IX
SUMMARY .....	X
1. UVOD .....	1
2. VJETROAGREGATI.....	4
2.1. VRSTE VJETROAGREGATA .....	4
2.2. DIJELOVI VJETROAGREGATA .....	5
3. STUP VJETROAGREGATA .....	7
3.1. SAMOSTOJEĆI ČELIČNI CIJEVNI STUP.....	8
4. OPTEREĆENJA VJETROAGREGATA .....	9
4.1. OPTEREĆENJA LOPATICE VJETROAGREGATA .....	9
4.2. OPTEREĆENJA GLAVČINE VJETROAGREGATA .....	10
4.3. OPTEREĆENJA VRHA STUPA VJETROAGREGATA .....	10
5. VIBRACIJSKI MODEL STUPA VJETROAGREGATA.....	12
6. MODALNA ANALIZA.....	27
6.1. TESTIRANJE PROGRAMA ZA ODREĐIVANJE ODZIVA U MODALNIM KOORDINATAMA.....	34
6.2. PRIMJENA PROGRAMA NA MODEL STUPA VJETROAGREGATA .....	40
7. ZAKLJUČAK .....	42
LITERATURA.....	43

## POPIS SLIKA

Slika 1 - Vjetroatregat [4].....	2
Slika 2 - Vjetroatregati s horizontalnom osi vrtnje [4].....	4
Slika 3 - Vjetroatregati s vertikalnom osi vrtnje [8].....	5
Slika 4 - Glavni dijelovi vjetroatregata [9].....	6
Slika 5 - Glavni dijelovi gondole [9].....	6
Slika 6 - Pridržani čelični (lijevo) i betonski stup (desno) [9] .....	7
Slika 7 - Rešetkasti stup [9].....	8
Slika 8 - Koordinatni sustav lopatice [2].....	9
Slika 9 - Rotirajući koordinatni sustav središta glavčine [2] .....	10
Slika 10 - Koordinatni sustav konstrukcije vjetroatregata [2].....	11
Slika 11 - Desni Kartezijev koordinatni sustav stupa vjetroatregata.....	11
Slika 12 - Prikaz podsegmenata modela stupa .....	12
Slika 13 - Prikaz dimenzija jednog podsegmenta stupa .....	13
Slika 14 - Diskretizacija mase jednostavnog podsegmenta stupa .....	14
Slika 15 - Razdvojeni i spojeni jednostavni segmenti stupa s prikazom raspodjele masa.....	14
Slika 16 - Dinamička elastična linija stupa .....	15
Slika 17 - Dimenzije podsegmenta stupa vjetroatregata .....	17
Slika 18 - Prikaz sila, promjera, masa i debljina stijenki modela stupa vjetroatregata .....	18
Slika 19 – Statička ravnoteža segmenta stupa.....	19
Slika 20 – Unutarnji moment savijanja u segmentu stupa .....	19
Slika 21 - Momentni dijagram u segmentu stupa.....	19
Slika 22 - Funkcija $f(x)$ za opterećenje silom $F$ [14] .....	20
Slika 23 - Progibi i nagibi stupa uslijed sile $F$ [14].....	21
Slika 24 - Funkcija $f(x)$ uslijed djelovanja moment $M$ [14].....	21
Slika 25 - Progibi i nagibi uslijed momenta $M$ [14].....	22
Slika 26 - Prva forma vibriranja - analiza bez mase i momenata.....	23
Slika 27 - Druga forma vibriranja - analiza bez mase i momenata .....	24
Slika 28 - Prva forma vibriranja - analiza samo s masom,.....	24
Slika 29 - Druga forma vibriranja - analiza samo s masom, .....	25
Slika 30 - Prva forma vibriranja - analiza s masom i momentom.....	25
Slika 31 - Druga forma vibriranja - analiza s masom i momentom .....	26
Slika 32 - Neprigušeni sustav s $n$ stupnjeva slobode gibanja.....	27
Slika 33 - Prigušeni sustav s $n$ stupnjeva slobode .....	32
Slika 34 - Fleksijski vibracijski sistem s 2 stupnja slobode gibanja .....	35
Slika 35 - Pomaci mase 1 i mase 2 dobiveni rješavanjem .....	36

Slika 36 - Pomaci mase 1 i mase 2 dobiveni rješavanjem .....	36
Slika 37 - Pomaci mase 1 i mase 2 dobiveni rješavanjem .....	37
Slika 38 – Usporedba rezultata za pomak mase 1 (1) .....	37
Slika 39 - Usporedba rezultata za pomak mase 1 (2) .....	38
Slika 40 - Usporedba rezultata za pomak mase 2 (1) .....	38
Slika 41 - Usporedba rezultata za pomak mase 2 (2) .....	39
Slika 42 - Funkcija povećanja za prvu modalnu koordinatu .....	40
Slika 43 - Funkcija povećanja za drugu modalnu koordinatu .....	41
Slika 44 - Funkcija povećanja za treću modalnu koordinatu .....	41

## POPIS TABLICA

Tablica 1 - Dimenzije vibracijskog stupa.....	12
Tablica 2 - Rezultati analize modela stupa vjetroagregata.....	23

## POPIS OZNAKA

<i>Oznaka</i>	<i>Mjerna jedinica</i>	<i>Opis</i>
$[B]$	m	modalna matrica
$[c]$	N/m	matrica krutosti
$[C]$	N/m	modalna matrica krutosti
$C_0$	$m^4$	konstanta
$C_1$	$m^3$	konstanta
$C_2$	$m^2$	konstanta
$C_3$	m	konstanta
$D$	m	veći promjer podsegmenta
$d$	m	manji promjer podsegmenta
$E$	Pa	Youngov modul elastičnosti
$F$	N	sila
$F_A$	N	sila na mjestu uklještenja stupa
$\vec{F}$	N	vektor vanjskih sila
$I_y$	$m^4$	aksijalni moment tromosti
$J$	$\text{kgm}^2$	dinamički moment tromosti gondole i vjetroturbine
$[k]$	Ns/m	matrica prigušenja
$[K]$	Ns/m	modalna matrica prigušenja



<i>Oznaka</i>	<i>Mjerna jedinica</i>	<i>Opis</i>
$l$	m	visina podsegmenta
$l^*$	m	dužina podsegmenta
$m$	kg	masa segmenta
$m_d$	kg	diskretizirana masa dna podsegmenta
$m_g$	kg	diskretizirana masa vrha podsegmenta
$[m]$	kg	matrica mase
$M$	Nm	moment
$M_A$	Nm	moment na mjestu uklještenja stupa
$[M]$	kg	modalna matrica mase
$r$	m	polumjer baze na vrhu segmenta
$R$	m	polumjer baze na dnu segmenta
$t$	m	debljina stijenke
$T$	/	težište podsegmenta
$V$	/	funkcija povećanja
$w_i$	m	progib stupa na mjestu koncentrirane mase
$\ddot{w}_i$	m/s <sup>2</sup>	ubrzanje koncentrirane mase
$\hat{w}_i$	m	amplituda progiba
$\vec{x}_i$	m	vektor pomaka

$\dot{\vec{x}}_i$	m/s	vektor brzine
$\ddot{\vec{x}}_i$	m/s <sup>2</sup>	vektor ubrzanja
$\hat{x}_i$	m	amplituda pomaka
$X_T$	m	položaj težišta segmenta
$\vec{X}_i$	m	forma vibriranja
$\alpha_{ij}$	/	uplivni koeficijent
$\zeta$	/	bezdimenzijski faktor prigušenja
$\eta$	/	omjer uzbudne i vlastite frekvencije
$\lambda$	s <sup>2</sup>	korijen karakteristične jednadžbe ( $1/\omega^2$ )
$\varphi$	rad	kut nagiba elastične linije
$\ddot{\varphi}$	rad/s <sup>2</sup>	kutno ubrzanje
$\hat{\varphi}$	rad	amplituda nagiba
$\omega$	rad/s	vlastita kružna frekvencija
$\Omega$	rad/s	kružna frekvencija harmonijske uzbude

## SAŽETAK

U radu su navedene vrste vjetroagregata, njihovi dijelovi i problemi koji se javljaju pri njihovom konstruiranju. Opisane su različite vrste stupova i načini njihove izrade. Kratko je objašnjeno opterećenje vjetroagregata. Primjenom metode uplivnih koeficijenata, izrađen je model stupa vjetroagregata, tj. numerički model koji relativno jednostavno, a opet zadovoljavajuće točno izračunava vlastite frekvencije stupa vjetroagregata. Numerička analiza provedena je u programskom paketu MATLAB. Određene su vlastite frekvencije i forme vibriranja stupa za primjer kada su zanemareni masa i momenti inercije gondole i vjetroturbine, kada su zanemareni samo momenti inercije te kada su i masa i momenti inercije uzeti u obzir. Na taj način je utvrđen utjecaj inercijskih karakteristika gondole i vjetroturbine na iznose vlastitih frekvencija stupa vjetroagregata.

Opisana je metoda modalne analize za neprigušene i prigušene sustave s  $n$  stupnjeva slobode gibanja. Računalni program za određivanje vibracijskog odziva stupa vjetroagregata koji se temelji na modalnoj analizi testiran je na jednostavnom fleksijskom sustavu s 2 stupnja slobode gibanja. Zbog nepoznavanja stvarnog opterećenja stupa nije se mogao odrediti realni odziv razmatranog stupa vjetroagregata. Treba naglasiti da ovaj numerički model omogućuje određivanje vibracijskog odziva stupa vjetroagregata na koji djeluje proizvoljna (stohastička) uzbuda.

## SUMMARY

In this thesis types of wind turbines are described, as well as their parts and problems that occur in designing them. Different kinds of wind turbine towers are described including the methods of their design. The load of wind turbine is also briefly discussed. A model of wind turbine tower designed using flexibility coefficient is a numerical model where natural frequencies of the wind turbine tower are analyzed simply yet accurately. The numerical analysis of the vibration model is implemented in a MATLAB software package. Natural frequencies and mode shapes of the tower are determined first excluding mass and moments of inertia of nacelle and hub, then excluding only moments of inertia and last including them both. In that way it was established the influence of inertial characteristics of the nacelle and the hub on natural frequencies of a wind turbine.

Modal analysis method for damped and undamped systems with  $n$  degrees of freedom is explained. Computer program for determining vibrational response based on modal analysis is tested on a flexural system with two degrees of freedom. Due to not knowing the actual load of the tower it was not possible to determine the real vibrational response of tower but this numerical model, when wind turbine tower is under arbitrary (stochastic) excitation, enables us to do so.

## 1. UVOD

Pronalaženje izvora čiste, ekološki prihvatljive energije veliki je izazov današnjice. Ogroman postotak svjetske energije još se uvijek dobiva iz ekološki neprihvatljivih izvora energije, pogotovo fosilnih goriva koja su dominantan izvor energije. Kako je osnova fosilnih goriva ugljik, normalnim sagorijevanjem tog goriva nastaje ugljični dioksid ( $\text{CO}_2$ ) koji je staklenički plin. Europska Unija nastoji usporiti globalno zagrijavanje postavljajući si za cilj 20% veću uporabu energije dobivene iz obnovljivih izvora do 2020. godine.

Vjetar je bogat, obnovljiv, lako dostupan i čist izvor energije. Sama proizvodnja energije vjetra nema ozbiljnijeg negativnog učinka na okoliš. Iako je nastanak vjetra složen proces, vjetar možemo opisati kao horizontalno gibanje atmosferskog zraka koje nastaje uslijed razlike u gustoći zraka, odnosno temperature. Energija vjetra je u stvari oblik sunčeve energije. Sunce neravnomjerno zagrijava različite dijelove Zemlje i to rezultira različitim tlakovima zraka, a vjetar nastaje zbog težnje za izjednačavanjem tlakova zraka. Takvo zagrijavanje tjera globalni atmosferski sustav prijenosa topline sa površine Zemlje prema stratosferi koja se ponaša kao virtualni strop. Topli zrak se uzdiže te se usmjerava prema polovima i zakreće pod utjecajem Zemljine rotacije, odnosno Coriolisove sile. Hladni zrak popunjava nastale praznine i na taj način uzrokuje stalne vjetrove. Većina energije takvog strujanja vjetra je na velikim visinama gdje brzina vjetra prelazi i 160 km/h. Dio energije vjetra trenjem prelazi u difuznu toplinu kroz atmosferu i Zemljinu površinu. Vjetar je izuzetno promjenjiv, prostorno i vremenski.

Ljudi su iskorištavali snagu vjetra tisućama godina. Prvo poznato iskorištavanje energije vjetra bilo je prije 5000 g. kada su korištena jedra na brodovima na Nilu. U Perziji, Kini i Indiji su se vjerojatno već nekoliko stotina godina prije nove ere koristile vjetrenjače za navodnjavanje i mljevenje žitarica, ali najstariji pisani dokument potječe iz 1219.g iz Krete gdje se „doslovno koristilo stotine vjetrenjača za navodnjavanje usjeva i pojilišta za stoku“. Danas je opće prihvaćeno da je snaga vjetra „jedna od najviše obećavajućih novih izvora energije“ koja može poslužiti kao alternativa proizvodnji električne energije fosilnim gorivima.

Zanimanje za korištenje vjetra kao energije naglo se povećava sedamdesetih godina prošlog stoljeća te doživljava ubrzani rast u posljednjih dvadesetak godina. Na međunarodnoj razini postignuta je suglasnost da je jedino tehnologija korištenja energije vjetra dovoljno razvijena da može zadanim tempom zadovoljiti potrebe proizvodnje električne energije iz obnovljivih izvora energije.

Razvoj tehnologije vjetroagregata u proteklih dvadesetak godina išao je u smjeru proizvodnje agregata što veće snage, većeg promjera rotora, jednostavnije proizvodnje, upotrebe sigurnijih i jeftinijih materijala. Sustavi za upravljanje moraju imati visoku pouzdanost i otpornost na promjene vanjskih uvjeta, prije svega brzine vjetra. Vjetar jako varira i s porastom brzine vjetra njegova snaga izrazito brzo raste, što ima za posljedicu postojanje dva vrlo različita radna područja vjetroagregata. U prvom radnom području je snaga manja od nazivne snage generatora vjetroagregata, dok u drugom snaga vjetra može biti puno veća nego nazivna snaga generatora.

Uslijed porasta zahtjeva za energijom vjetra dolazi do povećavanja nazivne snage vjetroagregata. Zbog toga su se i dimenzije vjetroagregata povećale, što je dovelo do većih konstrukcijskih opterećenja te zamora materijala. Sve veće lopatice vjetroagregata i sve snažniji vjetroagregati zahtijevaju i razvoj materijala od kojih se izrađuju. Uslijed velikih dimenzija stup i lopatice postaju savitljivi i neprestano vibriraju, a to dovodi do toga da upravljanje zakretanja lopatica ima veliki utjecaj na strukturne vibracije sustava. Zbog toga se na konstrukciju vjetroagregata stavljaju dodatni zahtjevi za kontrolu zakretanja lopatica čime se smanjuju dinamička opterećenja i povećava se iskoristivost vjetroagregata.



**Slika 1 - Vjetroagregat [4]**

U drugom poglavlju rada je opisano što je vjetroagregat i koji su njegovi glavni dijelovi te su opisane vrste vjetroagregata i njihove sličnosti i razlike.

S obzirom da je za ovaj rad jedan od najvažniji dijelova vjetroatregata, njegov stup, u trećem poglavlju se detaljno opisuju stupovi vjetroatregata. Navedena je podjela stupova te također važnost izrade i upotreba visokih stupova. Na kraju trećeg poglavlja je opisan samostojeći čelični cijevni stup i njegov postupak izrade.

Za razumijevanje utjecaja vjetra na vibracije stupa vjetroatregata potrebno je uvesti koordinatni sustav za lopatice, glavčinu i stup vjetroatregata, te je to opisano u četvrtom poglavlju.

U petom poglavlju je opisan numerički model stupa vjetroatregata i napravljena je numerička analiza vlastitih frekvencija i glavnih formi vibriranja stupa vjetroatregata u programskom paketu Matlab.

U šestom poglavlju su opisane modalne koordinate i primjena metode modalne analize pri određivanju odziva vjetroatregata za slučaj harmonijske uzbude.

## 2. VJETROAGREGATI

Vjetroagregati koriste energiju vjetra. To su elektromehanički sustavi koji pretvaraju kinetičku energiju vjetra u električnu energiju. Posljednjih tridesetak godina doživjeli su veliki rast i usavršavanje svojih komponenata. Od prvih prototipova do danas princip rada vjetroagregata je isti, no suvremeni vjetroagregati puno su složeniji, tehnički savršeniji i sastoje se od većeg broja komponenata. Dok su prvi vjetroagregati radili kao samostalna postrojenja, danas se zbog veće iskoristivosti energije na nekoj mikrolokaciji gotovo isključivo grade vjetroelektrane od kojih se najveće sastoje od nekoliko stotina vjetroagregata. Vjetroelektrana je niz blisko smještenih vjetroagregata koji zajedno proizvode električnu energiju i sa stajališta elektroenergetskog sustava predstavljaju jedan subjekt.

### 2.1. VRSTE VJETROAGREGATA

Postoje dva osnovna tipa konstrukcije vjetroagregata: vjetroagregati s horizontalnom osi vrtnje rotora i vjetroagregati s vertikalnom osi vrtnje rotora. Vjetroagregati s vertikalnom osi rotora su danas rijetko zastupljeni zbog slabije iskoristivosti i zbog preslabe brzine vjetra pri tlu.



Slika 2 - Vjetroagregati s horizontalnom osi vrtnje [4]





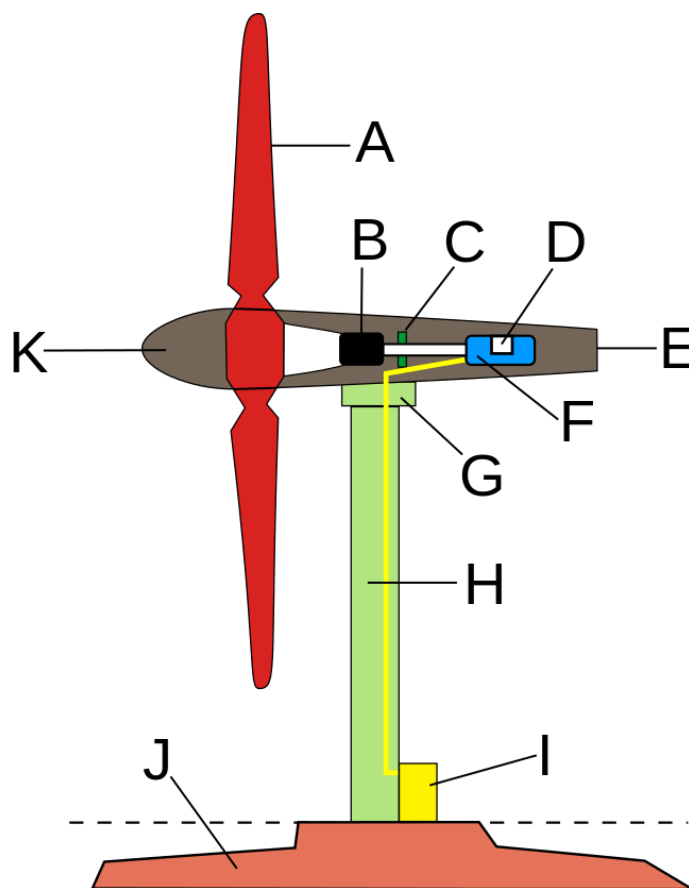
**Slika 3 - Vjetroagregati s vertikalnom osi vrtnje [8]**

Postoje također i različite podvrste vjetroagregata s obzirom na oblik lopatica (ravne ili zakrivljene), na broj lopatica te okrenutost prema vjetru i dr. S obzirom na mjesto korištenja vjetroagregata dijelimo ih na kopnene, priobalne i pučinske vjetroagregate. Kopneni se najduže koriste, te ih ima uvjerljivo najviše. Priobalni se ozbiljno razvijaju zadnjih par godina, te su općenito veći od kopnenih i s vremenom će ih biti sve više, a pučinski odnosno plutajući koji bi se nalazili na otvorenom moru zasada tek postoje kao pilot projekti.

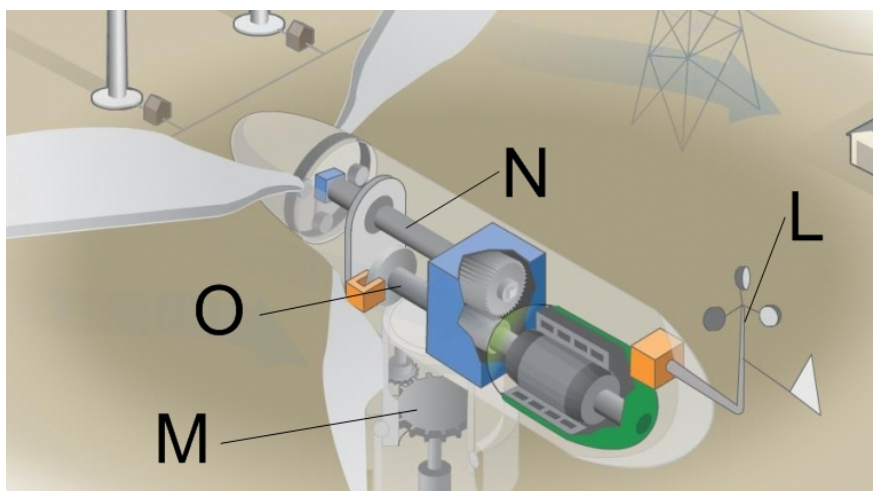
## **2.2. DIJELOVI VJETROAGREGATA**

Prema njihovoj osnovnoj namjeni sastavne dijelove vjetroagregata dijelimo u četiri velike skupine. Prvu skupinu čine vjetroturbine. Druga skupina su podsustavi za pretvorbu mehaničke energije vrtnje vjetroturbine u električnu. Treću skupinu čini potporna konstrukcija koja nosi vjetroturbinu i opremu vjetroagregata a četvrtu skupinu čini sustav upravljanja. U ovom radu posebno ću se posvetiti trećoj skupini, odnosno stupu vjetroagregata.

- A) Lopatice rotora
- B) Prijenosnik snage
- C) Kočioni sustav
- D) Upravljački sustav
- E) Gondola
- F) Električni generator
- G) Zakretnik
- H) Stup
- I) Priključak za mrežu
- J) Temelj
- K) Glavčina rotora
- L) Anemometar
- M) Planetarni prijenosnik
- N) Osovina za male brzine
- O) Osovina za velike brzine



Slika 4 - Glavni dijelovi vjetroagregata [9]



Slika 5 - Glavni dijelovi gondole [9]

### 3. STUP VJETROAGREGATA

Stup, odnosno visina stupa, važan je čimbenik u konstrukciji vjetroatregata. Vjetrovi na višoj nadmorskoj visini su jači i manje turbulentni što povoljno utječe na iskoristivost energije vjetra. Zato izdizanje vjetroturbine na što veću visinu predstavlja poseban zahtjev na potporna konstrukciju. A potporna konstrukcija vjetroatregata mora nositi vjetroturbinu, generator i svu ostalu opremu vjetroatregata. Na glavni nosač se montira generator, vjetroturbina i sva ostala oprema, a taj se nosač montira na vrlo visoki stup. Veća visina stupa znači i veću proizvodnju energije. Osim toga visina stupa mora biti dovoljno visoka da vrtnja lopatice ne predstavlja opasnost za vozila ili ljude koji se približe. U praksi se učvrstilo pravilo da visina stupa otprilike odgovara promjeru rotora, odnosno da lopatice u najnižem položaju sežu do polovine stupa. Danas imamo vjetroatregate visine preko 100 m. Izrada tako visokih i teških stupova vrlo je složena. Težina stupa vjetroatregata iznosi od 50 do preko 200 tona. Stupovi se izrađuju u više izvedbi i to kao cjevasti, konusni, teleskopski, rešetkasti, učvršćeni ili povezani i betonski.

Danas se najčešće koristi cjevasta konstrukcija, a prednost joj se nalazi u tome što ju osim visoke čvrstoće karakterizira i veća otpornost na vibracije. Prednost rešetkaste konstrukcije nalazi se u jednostavnosti, a budući da ju je moguće rastaviti na manje dijelove prikladnija je za prijevoz i ugradnju.

Unutar stupa se nalaze ljestve, a kod većih se ponekad ugrađuje i dizalo. Na vrhu stupa se nalazi čelični glavni nosač montiran na veliki zupčanik da se vjetroturbina može zakretati prema smjeru vjetra. Glavni nosač zatvoren je u oplati i naziva se gondola vjetroatregata. U podnožju se nalazi transformator koji povezuje vjetroatregat sa srednje-naponskom mrežom, te kontrolna i mjerna jedinica. Transformator se ponekad nalazi i u zasebnoj građevini u podnožju stupa.



Slika 6 - Pidržani čelični (lijevo) i betonski stup (desno) [9]



Slika 7 - Rešetkasti stup [9]

### 3.1. SAMOSTOJEĆI ČELIČNI CIJEVNI STUP

Danas su samostojeći cijevni stupovi daleko najkorištenije konstrukcije a glavni je razlog kratko vrijeme sastavljanja i podizanja stupa na licu mjesta. Mali stupovi, visine do 20 m, mogu se u tvornici proizvesti u komadu i postaviti u gotov temelj na gradilištu. Viši stupovi, do 100 m visine, proizvode se u dijelovima koji se spajaju na gradilištu. Razlog čestog odabira ove vrste stupa je ujedno i vrlo niska cijena čelika posljednjih godina.

Kod konstruiranja stupa treba uzeti u obzir statičko opterećenje (težina generatora i stupa), dinamičko opterećenje (djelovanje vjetra na rotor), utjecaj zamora materijala te opterećenja uzrokovana vibracijama. Problem nosivosti stupa je nosivost na savijanje na dnu stupa.

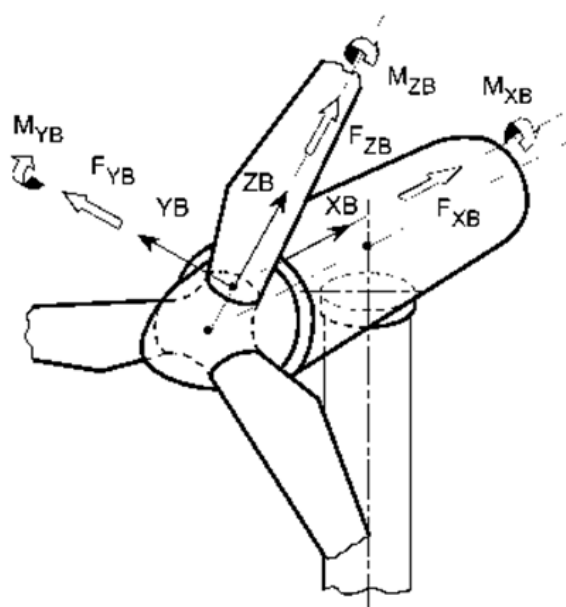
Većina stupova velikih vjetroelektrana je konusnog oblika s promjerom koji se smanjuje od baze prema vrhu. Prednost u odnosu na cilindrične oblike je da se ovime ostvaruje zahtijevana krutost uz smanjenje težine. Stupovi se sastoje od niza gotovih segmenata dužine do 30 m, te debljine stijenki od 10 do 50 mm. Segmenti stupa se sastoje od podsegmenata koji se izrađuju kao ploče koje su široke oko 2 m i koje se zaobljuju strojno u kružni oblik te se zavarivanjem spajaju u segmente. Uglavnom se primjenjuje čelik S355. Stup je spojen s temeljem tzv. „temeljnim segmentom“ koji se proizvodi posebno i ugrađuje u temelj dok je beton svjež.

## 4. OPTEREĆENJA VJETROAGREGATA

Posljednjih godina raste potreba za vjetroagregatima sve većih dimenzija, a s time konstrukcijska opterećenja vjetroagregata postaju sve značajnija i ne mogu se zanemariti. Glavni uzrok opterećenja konstrukcije vjetroagregata je vjetar. Ustvari, od ukupne energije vjetra, samo se dio pretvara u komponentu sile uzgona koja uzrokuje vrtnju rotora dok se veliki dio energije vjetra pretvara u komponentu sile uzgona koja uzrokuje silu potiska na lopaticu. Sili potiska se pribraja i sila otpora koja djeluje pri strujanju zraka preko lopatica. Osim sile potiska na lopatice, koja djeluje u smjeru vjetra, imamo i sile i momente u ostale dvije osi. Sile i momenti na pojedinu lopaticu se zbrajaju te opterećenju ostatak konstrukcije. Dok se glavčina i lopatice vrte, ostatak konstrukcije miruje. Dakle, opterećenja većine komponenata vjetroagregata posljedica su opterećenja lopatica vjetroturbine.

### 4.1. OPTEREĆENJA LOPATICE VJETROAGREGATA

Sile i momenti na lopaticu se mogu promatrati u bilo kojoj točki lopatice, no ipak za analizu strukturnih opterećenja čitavog vjetroagregata najvažnija su opterećenja u korijenu lopatice koja predstavljaju integrirano djelovanje opterećenja s pojedinih segmenata. Opterećenja u

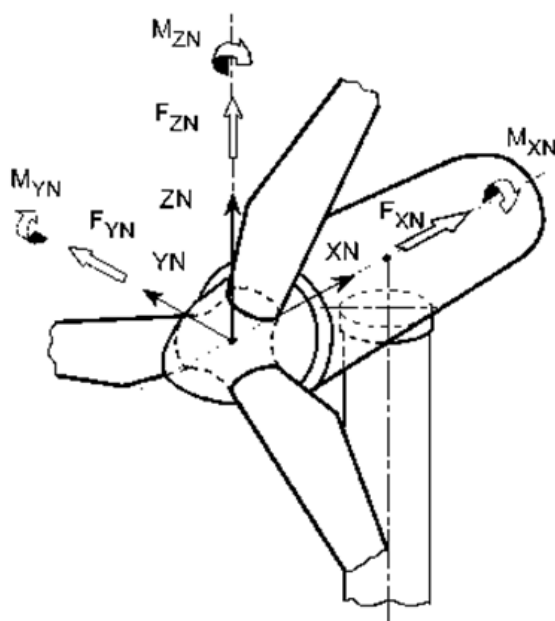


korijenu lopatice se promatraju u koordinatnom sustavu koji je vezan za lopaticu te s njom rotira. Lopatica ima koordinatni (slika 8) sustav koji se definira tako da os  $x$  ima smjer vjetra, os  $z$  ima smjer dužje osi lopatice, a os  $y$  je okomita na druge dvije osi i tvore desni Kartezijev koordinatni sustav. Pri definiciji koordinatnog sustava podrazumijeva se da je vektor brzine vjetra paralelan osi vrtnje rotora, odnosno vjetroturbina je pozicionirana „u vjetar“.

Slika 8 - Koordinatni sustav lopatice [2]

## 4.2. OPTEREĆENJA GLAVČINE VJETROAGREGATA

Pri razmatranju opterećenja glavčine vjetroatregata najprije trebamo uvesti rotirajući koordinatni sustav glavčine s ishodištem u samom središtu glavčine. Ovaj koordinatni sustav ćemo dobiti tako što ćemo koordinatni sustav jedne lopatice samo translirati u središte glavčine. Rotirajući koordinatni sustav (slika 9) se vrti brzinom vrtnje rotora vjetroturbine, a istom brzinom se vrte i koordinatni sustavi lopatica pa se lopatice rotora uvijek nalaze pod istim kutom u odnosu na rotirajući koordinatni sustav glavčine. Sila na središte glavčine u smjeru vjetra, odnosno u osi  $x$ , jednaka je zbroju sila na pojedinu lopaticu. Ta jednakost je posljedica činjenice da se osi  $x$  koordinatnih sustava svih triju lopatica podudaraju te su u odnosu na os rotirajućeg koordinatnog sustava glavčine samo translirane za polumjer glavčine.

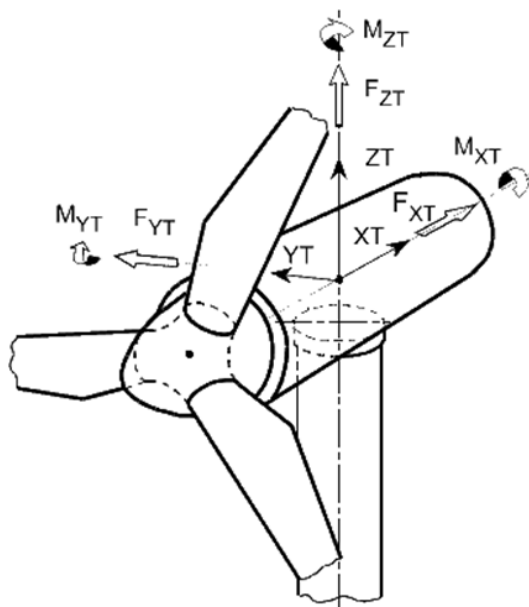


Slika 9 - Rotirajući koordinatni sustav središta glavčine [2]

## 4.3. OPTEREĆENJA VRHA STUPA VJETROAGREGATA

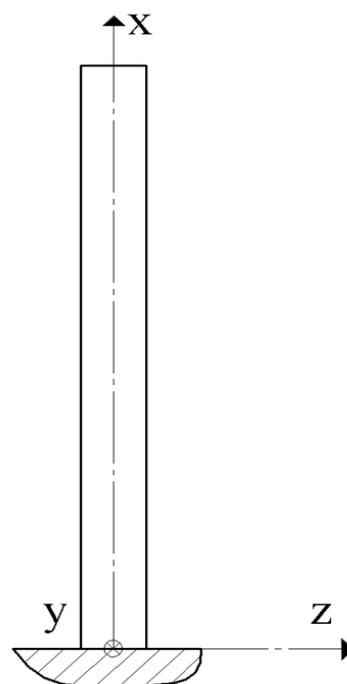
Za modeliranje opterećenja mirujućeg dijela konstrukcije vjetroatregata moramo definirati koordinatni sustav stupa čije je ishodište smješteno na vrhu tornja, u središtu njegovog kružnog presjeka (slika 10). Ova točka na stvarnim vjetroatregatima zapravo nije dio konstrukcije jer je toranj šupalj. Ipak, ishodište koordinatnog sustava je baš u njoj zbog lakšeg

izvoda modela i jasnije interpretacije rezultata. Ako izračunamo opterećenje u ovoj točki, lako je geometrijskim transformacijama izračunati i opterećenje u bilo kojoj drugoj točki konstrukcije. Ishodište koordinatnog sustava glavčine i koordinatnog sustava vrha tornja ne nalaze se na istoj visini jer se na vrhu tornja nalazi glavni nosač koji ima svoju visinu. To će imati za posljedicu pojavu dodatnih momenata opterećenja. Osim toga, os  $x$  koordinatnog sustava tornja uvijek je vodoravna, dok os  $x$  koordinatnog sustava glavčine podudara s osi vrtnje rotora pa može biti otklonjena od horizontale za mali kut.



Slika 10 - Koordinatni sustav konstrukcije vjetroagregata [2]

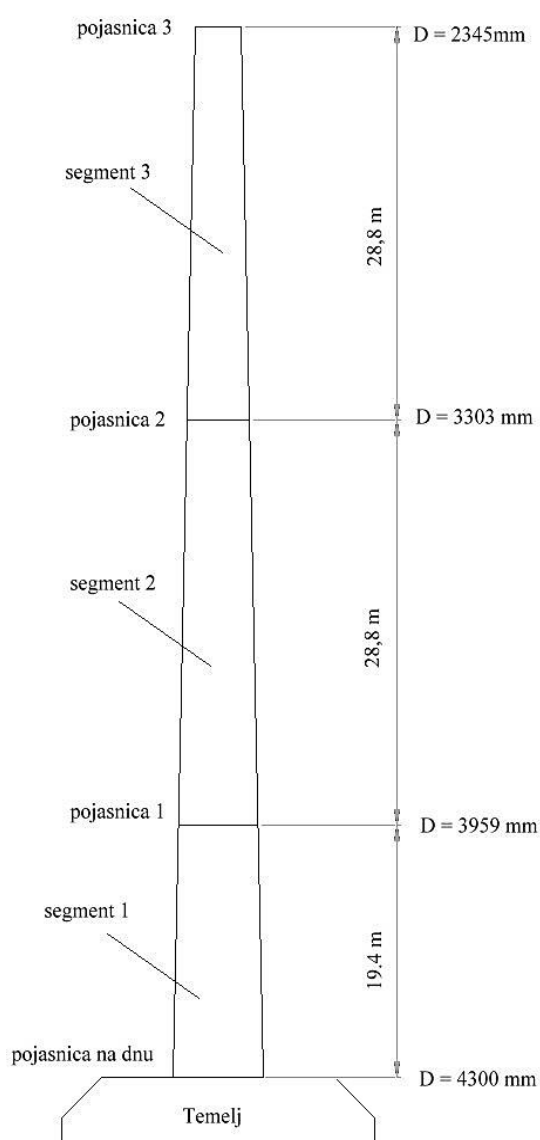
Iako je za prikaz opterećenja korišten koordinatni sustav gdje je  $x$  os u smjeru brzine vjetra, u ovom radu će se koristiti koordinatni sustav koji je korišten u kolegiju „Nauka o čvrstoći“ na Fakultetu strojarstva i brodogradnje u kojem se os  $x$  smješta u smjeru uzdužne osi stupa, os  $z$  u smjeru brzine vjetra, dok se os  $y$  smješta okomito na ostale dvije osi da se tvori desni Kartezijev koordinatni sustav (slika 11).



Slika 11 - Desni Kartezijev koordinatni sustav stupa vjetroagregata

## 5. VIBRACIJSKI MODEL STUPA VJETROAGREGATA

Razmatrani model stupa vjetroatregata je numerički model kod kojega će se što jednostavnije, a opet zadovoljavajuće točno analizirati vlastite frekvencije stupa vjetroatregata. Stup se sastoji od 25 podsegmenata te je njihov proračun proveden u programskom paketu MATLAB. Na slici 12 imamo jednostavni prikaz stupa podijeljen na 3 segmenta. U ovom radu napravljena je analiza vlastitih frekvencija i formi vibriranja jednostavnog vibracijskog modela i rješavanje problema određivanja odziva prebacivanjem u modalne koordinate.



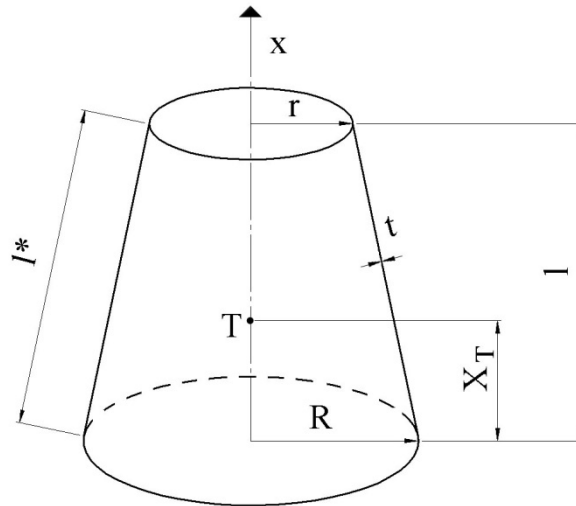
Slika 12 - Prikaz podsegmenata modela stupa

	Duljina [mm]	Debljina stjenke [mm]	Promjer (srednji) [mm]
Segment 1	4789	26	4274
	4793	24	4190
	4797	22	4108
	2410	20	4024
	2410	20	3982
Segment 2	2979	20	3940
	2979	20	3872
	2979	20	3804
	2979	20	3736
	2984	18	3668
	2983	18	3600
	2983	18	3532
	2983	18	3466
Segment 3	4804	16	3398
	2373	16	3288
	2953	14	3206
	2953	14	3108
	2953	14	3010
	2952	14	2910
	2973	12	2812
	2973	12	2318
	2974	12	2648
	2974	12	2516
	2389	14	2416
	90	16	2332

Tablica 1 - Dimenzije vibracijskog stupa



Za određivanje položaja težišta svakog podsegmenta, koje je potrebno za daljnje proračune, moraju se zadati dimenzije svakog pojedinačnog podsegmenta stupa. Točka  $T$  na slici 13 označava težište podsegmenta,  $t$  je debljina stijenke,  $R$  je polumjer baze na dnu podsegmenta, a  $r$  polumjer baze na vrhu. Duljina  $l$  označava visinu podsegmenta, a  $l^*$  duljinu dužine podsegmenta. Određivanje duljine dužine podsegmenta je dano izrazom (5.2). Izrazom (5.1) određujemo težište, a izrazom (5.3) masu svakog podsegmenta modela stupa, uzimajući u obzir da je materijal stupa čelik.



Slika 13 - Prikaz dimenzija jednog podsegmenta stupa

$$X_T = \frac{l}{3} \frac{R + 2r}{R + r} \quad (5.1)$$

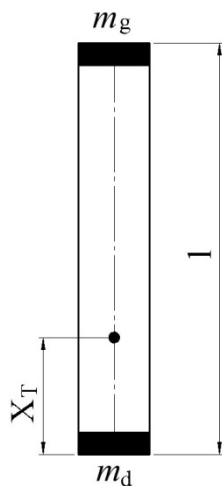
$$l^* = \sqrt{l^2 + (R - r)^2} \quad (5.2)$$

$$m = \rho t \pi l^* (R + r) \quad (5.3)$$

S obzirom da su dimenzije zadane i određeno je težište podsegmenta mogu se odrediti mase na vrhu i dnu svakog podsegmenta stupa. Izraz (5.4) prikazuje određivanje mase na dnu, a izraz (5.5) mase na vrhu podsegmenta stupa u svrhu diskretizacije mase.

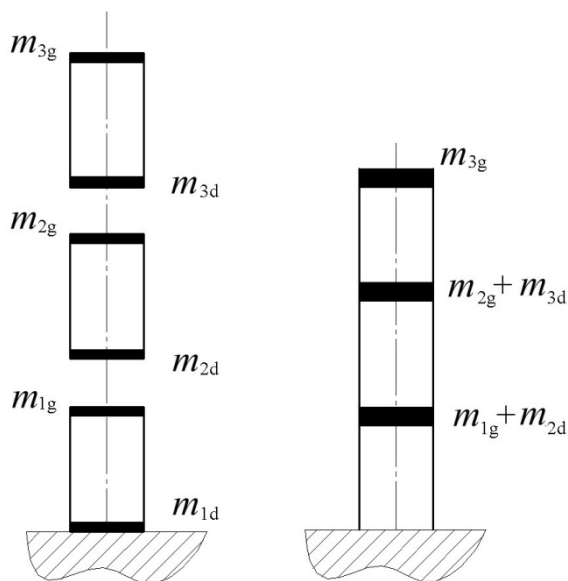
$$m_d = m \frac{l - X_T}{l} \quad (5.4)$$

$$m_g = m \frac{X_T}{l} \quad (5.5)$$



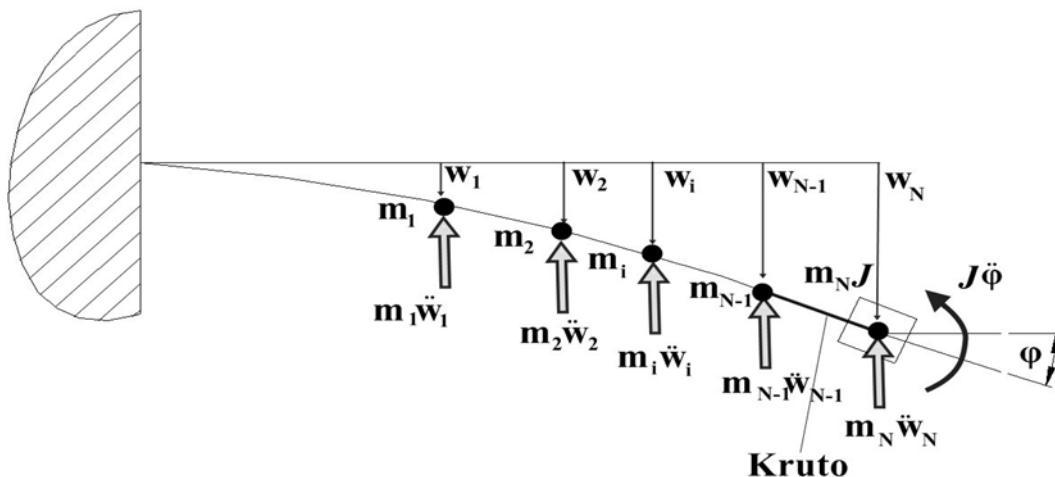
Slika 14 - Diskretizacija mase jednostavnog podsegmenta stupa

Tako sada podsegment ima određenu svoju masu, mase na vrhu i dnu te određeno svoje težište. U daljnjem postupku su segmenti stupa spojeni. Spajanjem segmenata stupa dobijemo raspodjelu masa prikazanu slikom 15.



Slika 15 - Razdvojeni i spojeni jednostavni segmenti stupa s prikazom raspodjele masa

Stup se zbog vanjskih utjecaja na vjetroagregat, savija. Ovdje je prikazan kao štap radi jednostavnosti prikaza. Dinamička elastična linija stupa je prikazana na slici 16. Dio štapa između točaka (N-1) i (N) predstavlja gondolu s vjetroturbinom, te je krut i ne savija se.



Slika 16 - Dinamička elastična linija stupa

Primjenom metode uplivnih koeficijenata dobiju se sljedeći izrazi:

$$w_i = -\sum_{j=1}^N m_j \ddot{w}_j \alpha_{ij} - J \ddot{\phi} \alpha_{i(N+1)} \quad i = 1, 2, 3, \dots, N \quad (5.6)$$

$$\phi = -\sum_{j=1}^N m_j \ddot{w}_j \alpha_{(N+1)j} - J \ddot{\phi} \alpha_{(N+1)(N+1)} \quad (5.7)$$

Izraz (5.6) predstavlja progibe stupa na mjestima koncentriranih masa, dok izraz (5.7) predstavlja nagib na elastičnu liniju na spoju stupa i gondole. Ako se u jednažbe (5.6) i (5.7) uvrste pretpostavljena rješenja za pomake i ubrzanja koncentriranih masa dobije se

$$\begin{aligned} w_i &= \hat{w}_i \sin \omega_N t \\ \ddot{w}_i &= -\omega_N^2 \hat{w}_i \sin \omega_N t \end{aligned} \quad (5.8)$$

odnosno nagib na elastičnu liniju na spoju stupa i gondole

$$\begin{aligned}\varphi &= \hat{\varphi} \sin \omega_N t \\ \ddot{\varphi} &= -\omega_N^2 \hat{\varphi} \sin \omega_N t\end{aligned}\tag{5.9}$$

dobije se sustav homogenih jednadžbi

$$\begin{bmatrix} m_1 \alpha_{11} \omega^2 - 1 & m_2 \alpha_{12} \omega^2 & \dots & m_i \alpha_{1i} \omega^2 & \dots & J \alpha_{1(N+1)} \omega^2 \\ m_1 \alpha_{21} \omega^2 & m_2 \alpha_{22} \omega^2 - 1 & \dots & m_i \alpha_{2i} \omega^2 & \dots & J \alpha_{2(N+1)} \omega^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \dots & \vdots \\ m_1 \alpha_{i1} \omega^2 & m_2 \alpha_{i2} \omega^2 & \dots & m_i \alpha_{ii} \omega^2 - 1 & \dots & J \alpha_{i(N+1)} \omega^2 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \ddots & \vdots \\ m_1 \alpha_{(N+1)1} \omega^2 & m_2 \alpha_{(N+1)2} \omega^2 & \dots & m_i \alpha_{(N+1)i} \omega^2 & \dots & J \alpha_{i(N+1)(N+1)} \omega^2 - 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{w}_1 \\ \hat{w}_2 \\ \vdots \\ \hat{w}_i \\ \vdots \\ \hat{\varphi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\tag{5.10}$$

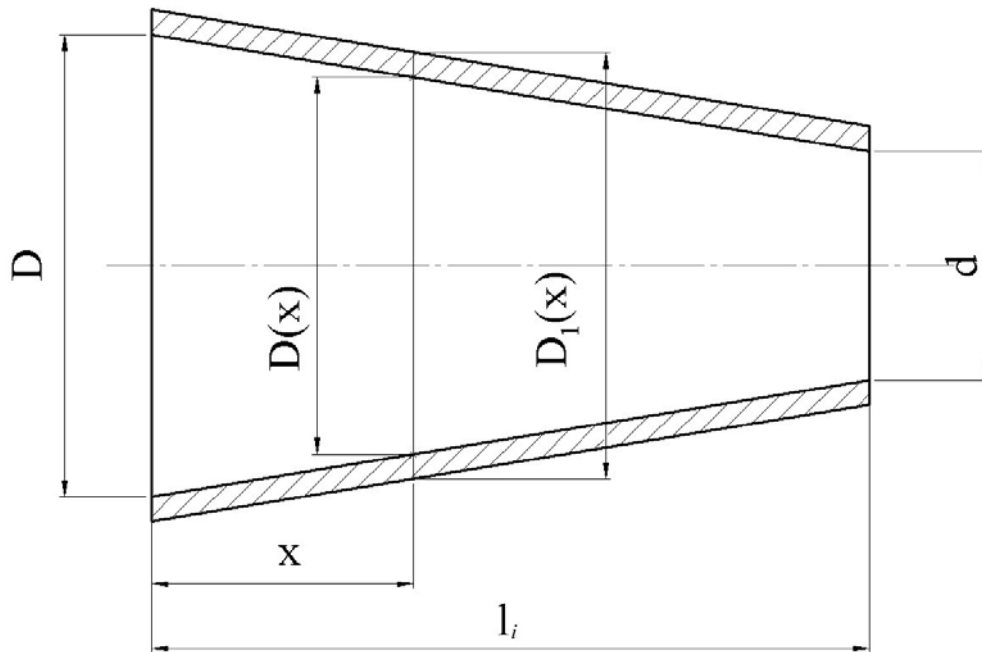
Za određivanje vlastitih frekvencija i glavnih formi vibriranja potrebno je postaviti uvjet da je

$$\det(\Delta) = 0\tag{5.11}$$

gdje je

$$\Delta = \begin{bmatrix} m_1 \alpha_{11} \omega^2 - 1 & m_2 \alpha_{12} \omega^2 & \dots & m_i \alpha_{1i} \omega^2 & \dots & J \alpha_{1(N+1)} \omega^2 \\ m_1 \alpha_{21} \omega^2 & m_2 \alpha_{22} \omega^2 - 1 & \dots & m_i \alpha_{2i} \omega^2 & \dots & J \alpha_{2(N+1)} \omega^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \dots & \vdots \\ m_1 \alpha_{i1} \omega^2 & m_2 \alpha_{i2} \omega^2 & \dots & m_i \alpha_{ii} \omega^2 - 1 & \dots & J \alpha_{i(N+1)} \omega^2 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \ddots & \vdots \\ m_1 \alpha_{(N+1)1} \omega^2 & m_2 \alpha_{(N+1)2} \omega^2 & \dots & m_i \alpha_{(N+1)i} \omega^2 & \dots & J \alpha_{i(N+1)(N+1)} \omega^2 - 1 \end{bmatrix}\tag{5.12}$$

Da bi se mogli odrediti uplivni koeficijenti potrebno je odrediti progibe i nagibe elastične linije na mjestima na kojima se nalaze koncentrirane mase kao i pomak težišta gondole. Za određivanje progiba i nagiba metodom integriranja diferencijalne jednadžbe elastične linije, potrebno je uz momentne dijagrame poznavati i aksijalne momente tromosti u ovisnosti o koordinati  $x$ . Unutarnji i vanjski promjer stupa su prikazani na slici 17.



Slika 17 - Dimenzije podsegmenta stupa vjetroagregata

Iz slike 17 se vidi ovisnost promjera  $D$  o koordinati  $x$  prikazana izrazom (5.13) i (5.14) kako bi se mogli prikazati na kraju aksijalni momenti tromosti (5.18).

Promjer  $D$  ovisi o koordinati  $x$  i može se zapisati kao

$$D(x) = D - \frac{D-d}{l} x \quad (5.13)$$

Vanjski promjer  $D_1$  također ovisi o koordinati  $x$  te se može zapisati preko  $D$  kao

$$D_1(x) = D(x) + 2t = D + 2t - \frac{D-d}{l} x \quad (5.14)$$

Općeniti moment tromosti promjenjivog promjera kružnog vijenca za naš slučaj

$$I_y(x) = \frac{\pi}{64} (D_1^4(x) - D^4(x)) \quad (5.15)$$

Ako uvedemo konstante  $C_0$ ,  $C_1$ ,  $C_2$  i  $C_3$

$$\begin{aligned} C_0 &= A^4 - D^4 \\ C_1 &= -4B(A^3 - D^3) \\ C_2 &= 6B^2(A^2 - D^2) \\ C_3 &= -4B^3(A - D) \end{aligned} \quad (5.16)$$

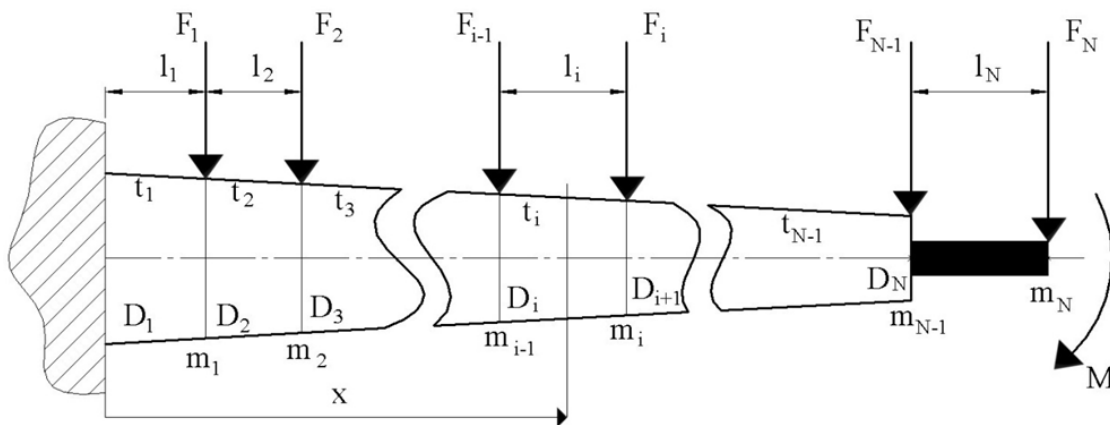
gdje su  $A$  i  $B$

$$\begin{aligned} A &= D + 2t \\ B &= \frac{D - d}{l} \end{aligned} \quad (5.17)$$

dobijemo konačno izraz za promjenjivi aksijalni moment tromosti

$$I_y(x) = \frac{\pi}{64} (C_0 + C_1 x + C_2 x^2 + C_3 x^3). \quad (5.18)$$

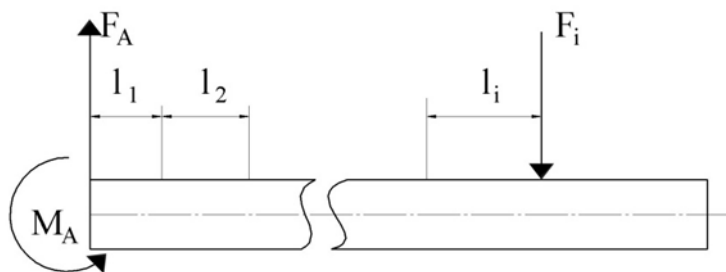
Nakon što smo dobili izraz za određivanje aksijalnog momenta tromosti u ovisnosti o koordinati  $x$  (5.18), opisan je i postupak dobivanja momentnih dijagrama. Prikaz sila na model stupa vjetroagregata prikazan je na slici 18, a ravnoteža sila i momenata na segmentu stupa na slikama 19 i 20.



Slika 18 - Prikaz sila, promjera, masa i debljina stijenki modela stupa vjetroagregata

$$F_i = 1, \quad i = 1, \dots, N$$

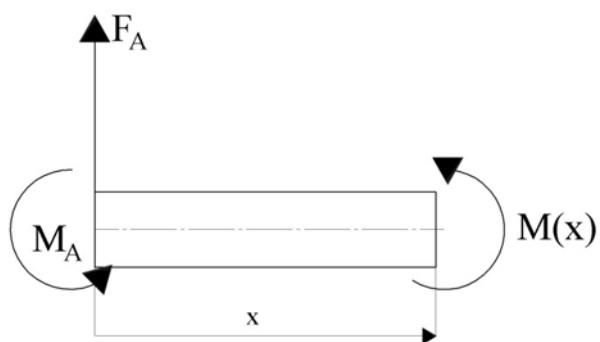
$$M = 1 \quad (5.19)$$



Slika 19 – Statička ravnoteža segmenta stupa

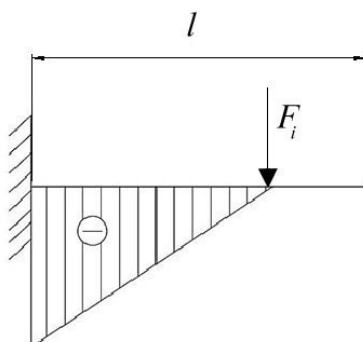
$$F_A = F_i = 1$$

$$M_A = F_i \sum_{k=1}^i l_k = \sum_{k=1}^i l_k \quad (5.20)$$



Slika 20 – Unutarnji moment savijanja u segmentu stupa

$$M(x) = F_A x - M_A = x - \sum_{k=1}^i l_k \quad (5.21)$$



Slika 21 - Momentni dijagram u segmentu stupa

Kako stup vjetroagregata ima promjenjivi moment inercije (5.18) diferencijalna jednadžba elastične linije stupa vjetroagregata glasi

$$\frac{d^2 w}{dx^2} = -\frac{M(x)}{EI_y(x)} = f(x). \quad (5.22)$$

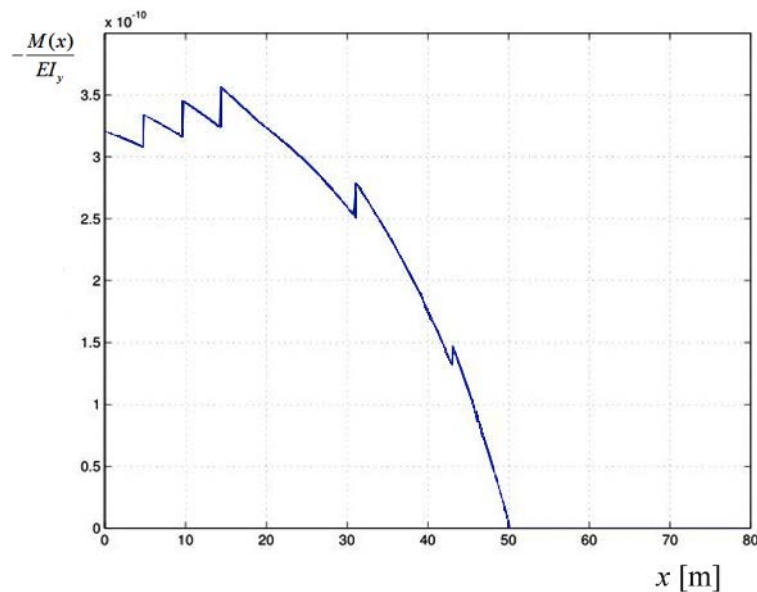
Budući da za funkcije

$$\frac{dx}{C_0 + C_1 x + C_2 x^2 + C_3 x^3} \quad i \quad \frac{xdx}{C_0 + C_1 x + C_2 x^2 + C_3 x^3}$$

ne postoji analitičko rješenje, progibi i nagibi elastične linije stupa vjetroagregata određuju se numerički korištenjem izraza

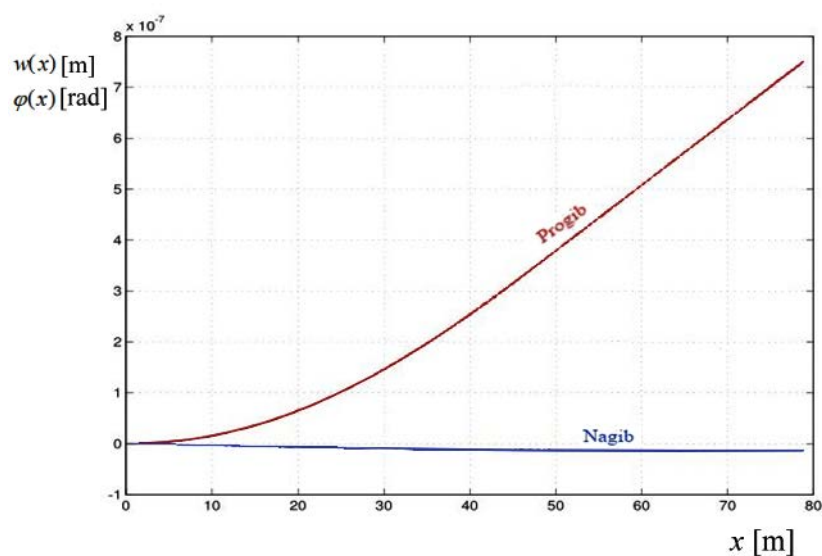
$$\begin{aligned} \varphi(x) &= -\frac{dw}{dx} = \int_0^x f(x) dx, \\ w(x) &= \int_0^x \varphi(x) dx. \end{aligned} \quad (5.23)$$

Funkcija  $f(x) = -\frac{M(x)}{EI_y} = \frac{d^2 w}{dx^2}$  za slučaj opterećenja silom  $F=1$  za  $x=50$  m prikazana je na slici 22, dok slika 23 prikazuje statičku elastičnu liniju, odnosno progibe i nagibe stupa uslijed sile  $F$ .

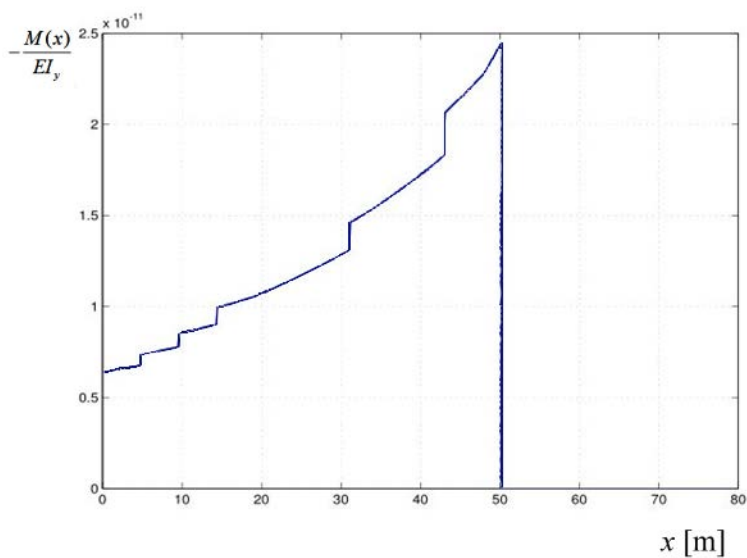


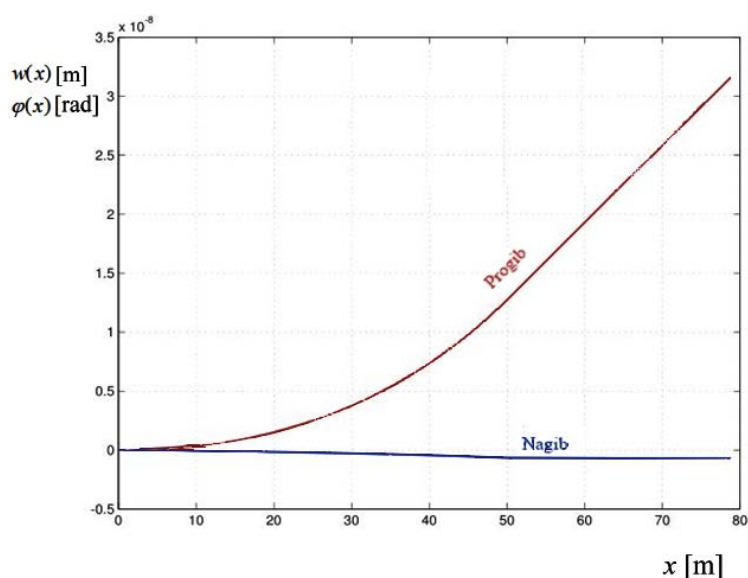
Slika 22 - Funkcija  $f(x)$  za opterećenje silom  $F$  [14]



Slika 23 - Progibi i nagibi stupa uslijed sile  $F$  [14]

Na slici 24 prikazana je funkcija  $f(x) = -\frac{M(x)}{EI_y} = \frac{d^2 w}{dx^2}$  za slučaj opterećenja momentom  $M=1$  za  $x=50$  m, dok je na slici 25 prikazana statička elastična linija stupa uslijed momenta  $M$ .

Slika 24 - Funkcija  $f(x)$  uslijed djelovanja moment  $M$  [14]



Slika 25 - Progibi i nagibi uslijed momenta  $M$  [14]

Na temelju opisanog vibracijskog modela stupa vjetroagregata napravljen je program u programskom jeziku MATLAB. Radi provjere računalnog programa ponovljena je analiza vlastitih frekvencija i formi vibriranja stupa vjetroagregata iz [14].

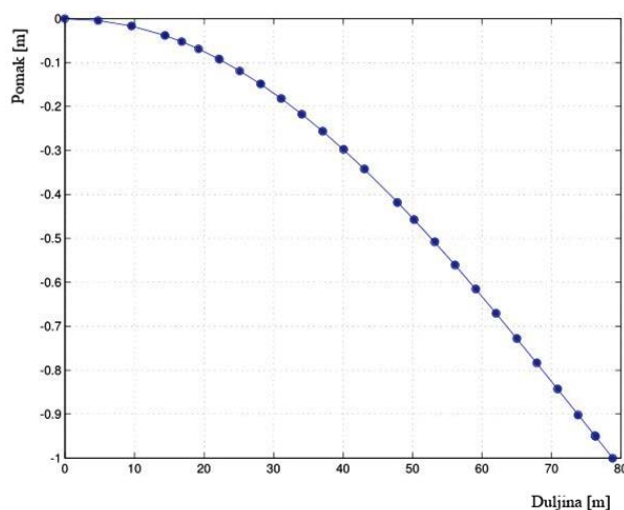
Napravljena su tri primjera u kojima su razmatrane prve tri vlastite frekvencije s odgovarajućim formama vibriranja. Prve frekvencije su najniže i dobivaju se najprecizniji rezultati. Što je frekvencija, odnosno forma vibriranja veća, to je veća mogućnost pogreške u krajnjem rezultatu.

Primjer 1 je napravljen s zanemarivanjem mase i momenata inercije gondole i vjetroturbine. U primjeru 2 je uzeta u obzir masa gondole i vjetroturbine iznosa 67000 kg, dok su u primjeru 3 uz masu uvršteni i odgovarajući momenti inercije. U tablici 2 prikazani su rezultati analize, odnosno prva, druga i treća vlastita frekvencija za tri razmatrana primjera konstrukcije.

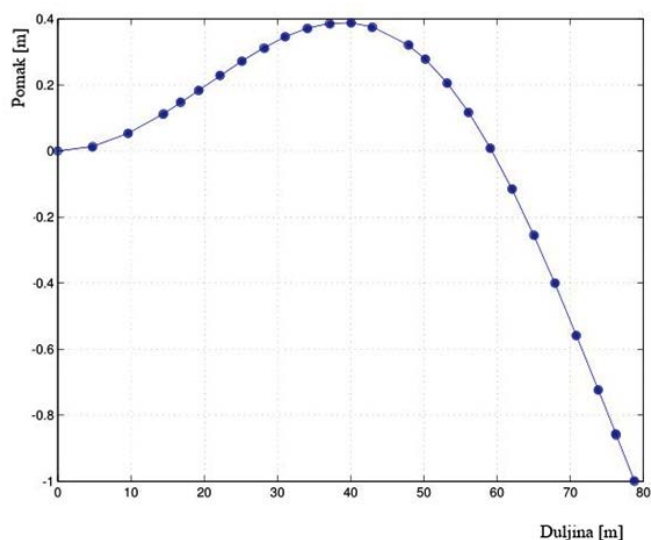
Broj analize	Masa [kg]	Moment inercije [kgm <sup>2</sup> ]	1.vlastita frekvencija [Hz]	2.vlastita frekvencija [Hz]	3.vlastita frekvencija [Hz]
1	0	0	0.97702	4.17766	10.17703
2	67000	0	0.40455	2.71949	7.91650
3	67000	100000	0.40441	2.70255	7.75995

Tablica 2 - Rezultati analize modela stupa vjetroagregata

Na slikama 26 i 27 su prikazane prva i druga forma vibriranja za primjer u kojem su zanemareni masa i momenti inercije gondole i vjetroturbine.



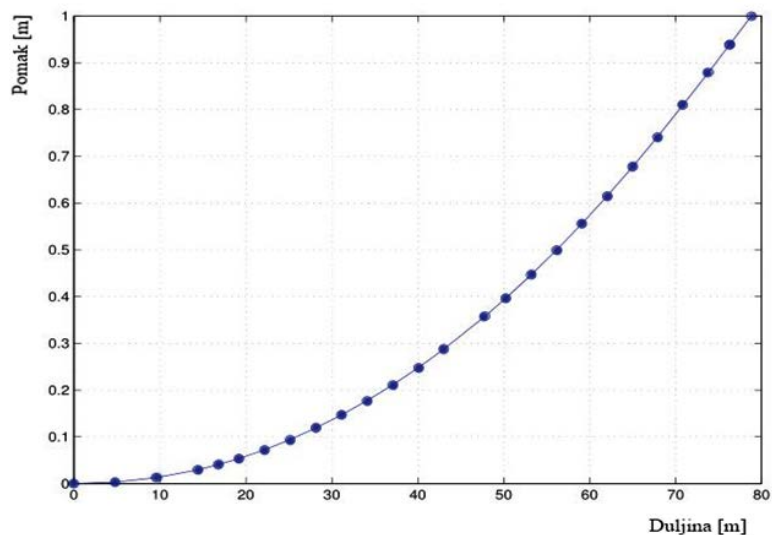
Slika 26 - Prva forma vibriranja - analiza bez mase i momenata  
inercije gondole i vjetroturbine ( $f_n = 0,97702$  Hz)



**Slika 27 - Druga forma vibriranja - analiza bez mase i momenata**

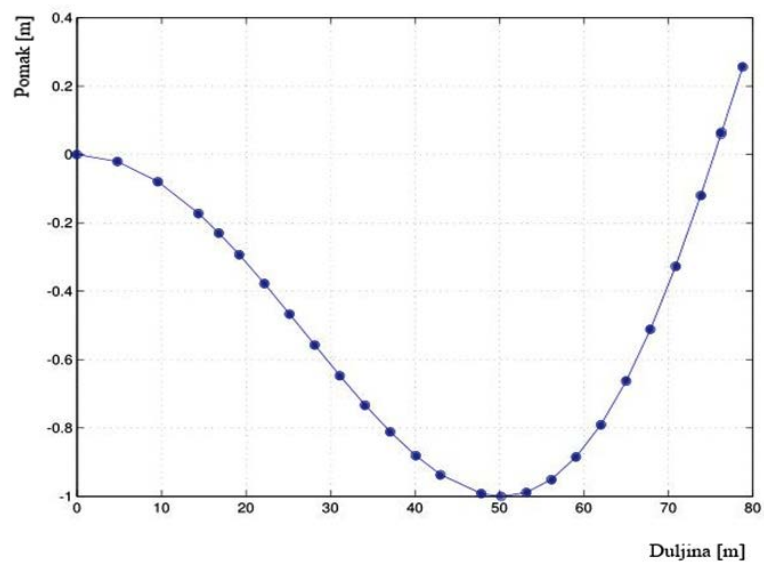
**inercije gondole i vjetroturbine ( $f_n = 4,17766$  Hz)**

Na slikama 28 i 29 su prikazane prva i druga forma vibriranja za primjer u kojem su uzeti u obzir masa gondole i vjetroturbine, a zanemareni momenti inercije.



**Slika 28 - Prva forma vibriranja - analiza samo s masom,**

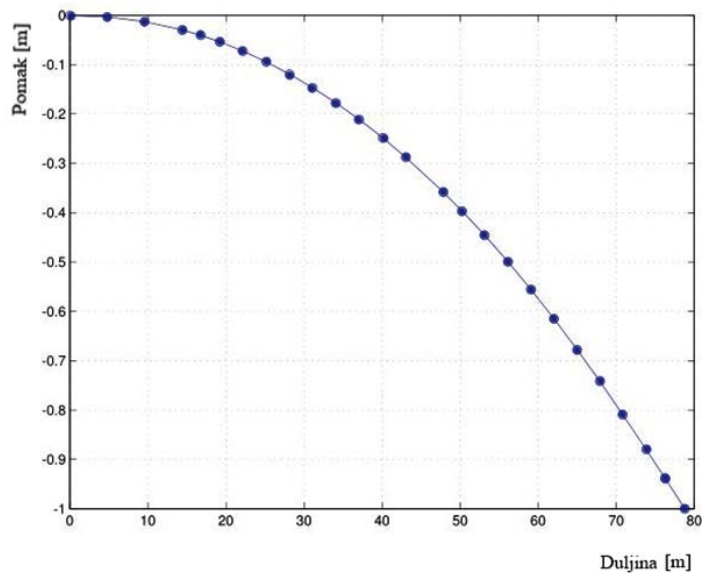
**bez momenata inercije gondole i vjetroturbine ( $f_n = 0,40455$  Hz)**



Slika 29 - Druga forma vibriranja - analiza samo s masom,

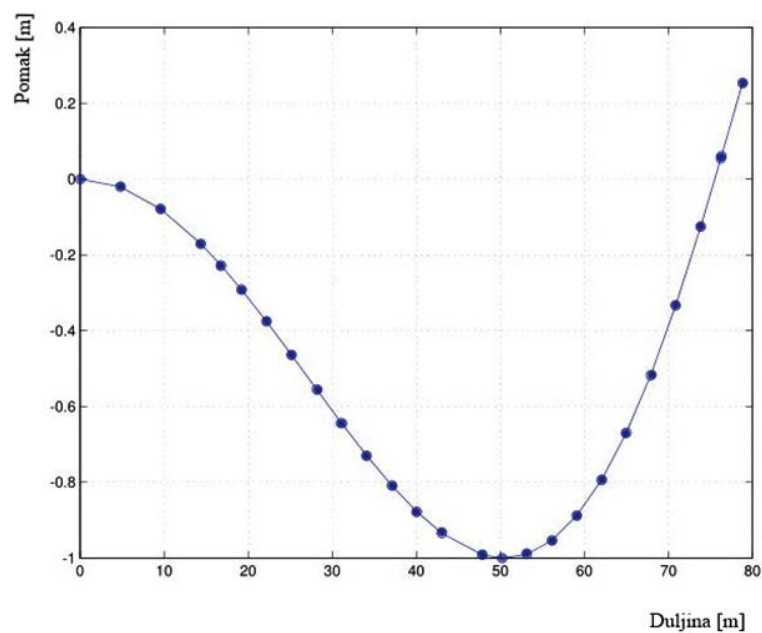
bez momenata inercije gondole i vjetroturbine ( $f_n = 2,7195$  Hz)

Na slikama 30 i 31 su prikazane prva i druga forma vibriranja za primjer u kojem su uzeti u obzir masa i momenti inercije gondole i vjetroturbine.



Slika 30 - Prva forma vibriranja - analiza s masom i momentom

inercije gondole i vjetroturbine ( $f_n = 0.40441$  Hz)



Slika 31 - Druga forma vibriranja - analiza s masom i momentom

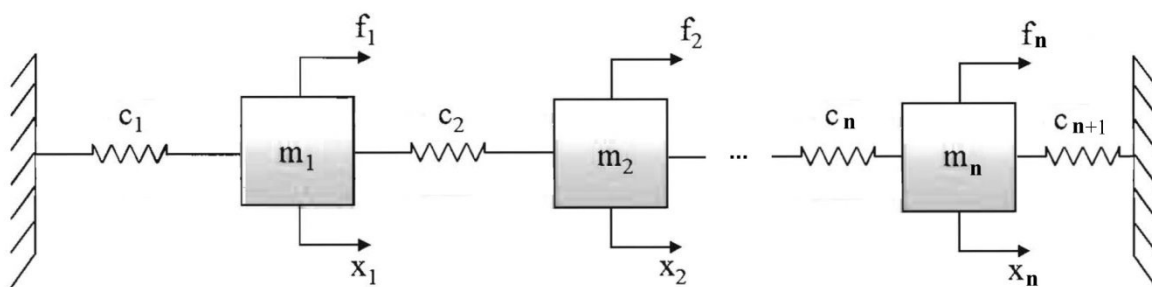
inercije gondole i vjetroturbine ( $f_n = 2.70255$  Hz)

Budući da su dobiveni identični rezultati onima iz [14] može se zaključiti da razmatrani program daje korektne vrijednosti za vlastite frekvencije i forme vibriranja.

## 6. MODALNA ANALIZA

Većina konstrukcija uglavnom je složenija od sustava s jednom masom, oprugom i prigušivačem, pa ćemo zato razmatrati sustav s  $n$  stupnjeva slobode. Kada vanjske sile djeluju na sustav s više stupnjeva slobode, sustav je podvrgnut prisilnim vibracijama. Za sustav sa  $n$  koordinatama ili stupnjevima slobode, jednačbe gibanja su skup  $n$  spregnutih običnih diferencijalnih jednačbi drugog reda. Rješenje ovih jednačbi postaje složenije kada je stupanj slobode sustava ( $n$ ) velik i/ili kada prisilne funkcije nisu periodične. U takvim slučajevima, prikladnija metoda poznata kao „modalna analiza“ može se upotrijebiti za rješavanje problema. U ovoj metodi koristi se eksponencionalni teorem, a pomaci masa izražavaju se kao linearna transformacija formi vibriranja sustava. Ta linearna transformacija razdvaja jednačbe gibanja tako da dobivamo skup  $n$  raspregnutih diferencijalnih jednačbi drugog reda.

Razmotriti ćemo metodu modalne analize za neprigušene i prigušene sustave s  $n$  stupnjeva slobode gibanja.



Slika 32 - Neprigušeni sustav s  $n$  stupnjeva slobode gibanja

Jednačbe gibanja sustava s više stupnjeva slobode gibanja na koje djeluju vanjske sile mogu se zapisati u matričnom obliku

$$[m]\ddot{\vec{x}} + [c]\dot{\vec{x}} = \vec{F} \quad (6.1)$$

gdje su  $[m]$  i  $[c]$  matrica mase i matrica krutosti, a  $\vec{F}$  vektor vanjskih sila.

Opće rješenje sustava jednadžbi (6.1) je dano izrazom (6.2)

$$\begin{aligned}x_i &= A \sin \omega_i t, \\ \dot{x}_i &= \omega_i A \cos \omega_i t, \\ \ddot{x}_i &= -\omega_i^2 A \sin \omega_i t, \\ \ddot{x}_i &= -\omega_i^2 x_i,\end{aligned}\tag{6.2}$$

gdje je  $\omega$  kružna frekvencija.

Izraz (6.1) možemo zapisati kao

$$-\omega^2 [m] \vec{x} + [c] \vec{x} = \vec{F}\tag{6.3}$$

Ako je vektor proizvoljnih vanjskih sila  $\vec{F}$  jednak nuli, radi se o slobodnim vibracijama razmatranog sustava te možemo napisati izraz

$$-\omega^2 [m] \vec{x} + [c] \vec{x} = 0.\tag{6.4}$$

Izraz (6.4) zapišemo kao

$$[-\omega^2 [m] + [c]] \vec{x} = 0.\tag{6.5}$$

Jednadžba (6.5) nije ništa drugo nego sustav algebarskih jednadžbi sa nepoznatim  $\omega^2$  i  $\vec{x}$ . Iz teorije jednakosti je poznato da pod uvjetom da jednadžba (6.5) nema trivijalno rješenje,  $\vec{x}=0$ , determinanta koeficijenata mora biti jednaka nuli. Determinanta koeficijenata biti će polinom po  $\omega^2$ . Korijeni tog polinoma nazivaju se vlastite vrijednosti. Izraz 6.5 možemo preformulirati na nekoliko različitih načina.

Prvo podijelimo (6.5) sa  $-\omega^2$  i onda pomnožimo sa  $[c]^{-1}$  i dobijemo izraz (6.6).

$$\left[ [c]^{-1} [m] - \frac{1}{\omega^2} [I] \right] \vec{x} = 0\tag{6.6}$$

Drugi način preformuliranja problema vlastitih vrijednosti bio bi da pomnožimo jednadžbu (6.5) s  $[m]^{-1}$ .

$$\left[ [m]^{-1} [c] - \omega^2 [I] \right] \vec{x} = 0\tag{6.7}$$



U jednadžbi (6.6) korijeni frekvencijske jednadžbe su  $\frac{1}{\omega^2}$ , a u (6.7) su  $\omega^2$ . Izrazi (6.6) i (6.7) su zapravo inverzni jedan drugom. Rješenje, vektor  $\vec{x}$ , za izraze (6.6) i (6.7) koji odgovaraju točno određenoj formi vibriranja (vlastitoj vrijednosti) naziva se vlastiti vektor, odnosno modalni vektor. Veličine  $x_i$  predstavljaju sliku (obrazac) pomaka konstrukcije za određenu frekvenciju vibracija. Kako su jednadžbe (6.6) i (6.7) homogene, ne postoji jedinstveno rješenje za  $x$ . Možemo samo dobiti odnose između određenih vrijednosti vektora  $x$ . Drugim riječima, možemo odrediti vrijednosti vektora  $x$  na taj način da odredimo jedan  $x$ , kojem možemo dati proizvoljnu vrijednost, a iz toga i sve ostale vrijednosti vektora  $x$ .

Stoga pomak gibanja konstrukcije, koju opisuje forma vibriranja, je određena poznatim odnosom amplituda kretanja u različitim točkama konstrukcije.

Rješenje problema vlastitih vrijednosti, odnosno rješenja jednadžbi (6.6) i (6.7) dobiju se tako da se uoči da su te jednadžbe, zapravo, sustav homogenih jednadžbi i zato, za netrivialno rješenje, determinanta koeficijenata mora biti jednaka nuli.

$$\left| [c]^{-1} [m] - \frac{1}{\omega^2} [I] \right| = 0 \quad (6.8)$$

Jednadžba (6.8) označava se kao karakteristična determinanta. Ona može biti napisana kao izraz (6.9).

$$\lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + a_2 \lambda^{n-2} + \dots + a_n = 0 \quad (6.9)$$

Izraz (6.9) je karakteristična jednadžba sustava s  $n$  stupnjeva slobode gibanja. U njoj je  $\lambda = \frac{1}{\omega^2}$ . Korijeni tog izraza se nazivaju vlastite vrijednosti sustava.

Rješenje problema vlastitih vrijednosti, kako je prikazano izrazom (6.6) daje  $n$  vlastitih vrijednosti  $\omega_i$  i  $n$  formi vibriranja  $\vec{X}_i$ , gdje je  $n$  broj stupnjeva slobode sustava. Podsjetimo da određena vlastita vrijednost, recimo  $\omega_r$  i njena forma vibriranja  $\vec{X}_r$ , zadovoljavaju jednadžbu (6.5). Ako zamijenimo u (6.5)  $\omega = \omega_r$  i  $\vec{x} = \vec{X}_r$  dobijemo (6.10).

$$\omega_r^2 [m] \vec{X}_r = [c] \vec{X}_r \quad (6.10)$$

Sada pomnožimo s lijeve strane izraz (6.10) s drugim načinom vibriranja, recimo  $\vec{X}_s^T$ , gdje T označava transponiranu matricu, dobit ćemo izraz (6.11).

$$\omega_r^2 \vec{X}_s^T [m] \vec{X}_r = \vec{X}_s^T [c] \vec{X}_r \quad (6.11)$$

Ako iskoristimo pravilo transponiranja matrica (6.12)

$$[[A][B]]^T = [B]^T [A]^T \quad (6.12)$$

i transponiramo obje strane jednadžbe (6.11) dobijemo izraz (6.13).

$$\omega_r^2 \vec{X}_r^T [m] \vec{X}_s = \vec{X}_r^T [c] \vec{X}_s \quad (6.13)$$

U izrazu (6.13) su  $[m] = [m]^T$  i  $[c] = [c]^T$  jer su  $[m]$  i  $[c]$  simetrične matrice.

Ako zamijenimo  $\omega = \omega_s$  i  $\vec{u} = \vec{X}_s$  u izrazu (6.5) i pomnožimo obje strane sa  $\vec{X}_r^T$  dobit ćemo izraz (6.14).

$$\omega_s^2 \vec{X}_r^T [m] \vec{X}_s = \vec{X}_r^T [c] \vec{X}_s \quad (6.14)$$

Zbog simetrije matrica  $[m]$  i  $[c]$  vrijedi pravilo  $\vec{X}_s^T [m] \vec{X}_r = \vec{X}_r^T [m] \vec{X}_s$  i  $\vec{X}_s^T [c] \vec{X}_r = \vec{X}_r^T [c] \vec{X}_s$ , tako da se oduzimanjem izraza (6.14) od (6.11) dobiva (6.15).

$$(\omega_r - \omega_s)^2 \vec{X}_r^T [m] \vec{X}_s = 0 \quad (6.15)$$

Ako je  $r \neq s$  (implicira dvije različite frekvencije) slijedi da je:

$$\vec{X}_r^T [m] \vec{X}_s = 0 \quad (6.16)$$

i iz (6.14) slijedi:

$$\vec{X}_r^T [c] \vec{X}_s = 0 \quad (6.17)$$

Izraz (6.16) pokazuje kako su forme vibriranja, koje pripadaju različitim vlastitim frekvencijama, ortogonalne preko matrice inercije, te analogno tome izraz (6.17) pokazuje kako su također ortogonalne preko matrice krutosti.

Ako se malo vratimo i pogledamo jednadžbu gibanja neprigušenog sustava (6.3), vidimo da nam je glavna prepreka koja se javlja pri rješavanju izraza (6.3) za dobivanje odziva sustava  $\vec{x}$ , a pri određenom zadanom sustavu sila i početnih uvjeta, je sprega između pojedinačnih jednadžbi. U izrazima za matrice masa i krutosti ta sprega je predstavljena ne dijagonalnim elementima različitim od nule. Jednadžba (6.3) predstavlja sustav kad je statički spregnut (nedijagonalna matrica krutosti). Ako bi sustav jednadžbi bio raspregnut, tj. da su matrice masa i krutosti dijagonalne, tada bi se svaka jednadžba mogla riješiti nezavisno jedna od druge. Već smo spomenuli da se taj postupak koji sustav spregnutih jednadžbi raspereže i pretvara ga u sustav nezavisnih jednadžbi, naziva modalna analiza.

Postupak koji se koristi za rasperežanje spregnutog sustava jednadžbi je u osnovi transformacija koordinata. Drugim riječima, tražiti ćemo transformaciju koordinata koja transformira naše originalne koordinate ( $x$ ) u drugi ekvivalentni sustav koordinata ( $q$ ), koja će učiniti da sustav bude statički i inercijski raspregnut. Te nove koordinate se obično označavaju kao modalne koordinate, normalne koordinate ili glavne koordinate.

$$\vec{x}(t) = q_1(t) \vec{X}^{(1)} + q_2(t) \vec{X}^{(2)} + \dots + q_n(t) \vec{X}^{(n)} \quad (6.18)$$

Ako se pomnože s lijeva i s desna matrice masa i krutosti sa različitim formama vibriranja kao što prikazuju (6.16) i (6.17) rezultat je nula. Međutim, ako to množenje učinimo sa istim formama, rezultat je konstanta (6.19).

$$\vec{X}_r^T [m] \vec{X}_r = M_r \quad (6.19)$$

Vlastiti vektori tvore tzv. matricu formi vibriranja ili modalnu matricu (6.20).

$$[B] = [\vec{X}^{(1)} \quad \vec{X}^{(2)} \quad \dots \quad \vec{X}^{(n)}] \quad (6.20)$$

S matricom formi vibriranja (6.20) može se provesti transformacija koordinata, odnosno definiranje novog koordinatnog sustava (6.21).

$$\vec{x}(t) = [B] \vec{q}(t) \quad (6.21)$$

Kako matrica formi vibriranja nije funkcija vremena, možemo zapisati i

$$\ddot{\vec{x}}(t) = [B] \ddot{\vec{q}}(t) \quad (6.22)$$

Ako uvrstimo izraz (6.21) i (6.22) u početnu jednadžbu (6.1) dobit ćemo (6.23).

$$[m][B] \ddot{\vec{q}} + [c][B] \dot{\vec{q}} = \vec{F} \quad (6.23)$$

Pomnožimo li s lijeva s  $[B]^T$  dobijemo jednadžbu (6.24) koja je ekvivalentna jednadžbi (6.1) samo u različitom koordinatnom sustavu.

$$[B]^T [m][B]\ddot{\vec{q}} + [B]^T [c][B]\dot{\vec{q}} = [B]^T \vec{F} \quad (6.24)$$

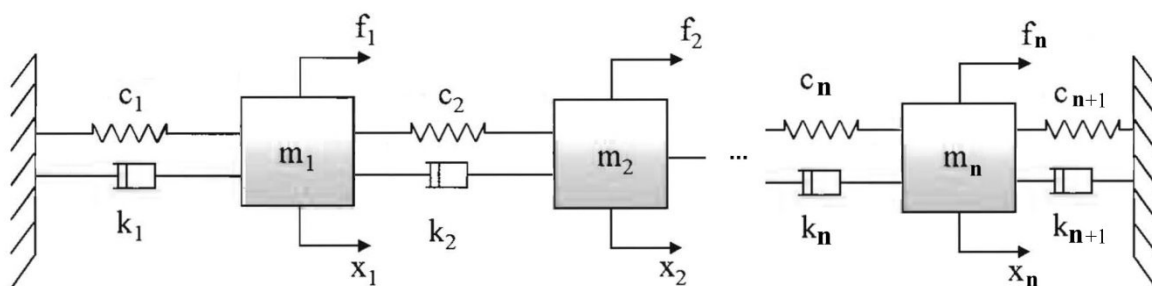
Ako imamo na umu ortogonalnost formi vibriranja vidimo da su:

$$\begin{aligned} [B]^T [m][B] &= [M] \\ [B]^T [c][B] &= [C] \\ [B]^T \vec{F} &= \vec{F}_{\text{mod}} \end{aligned} \quad (6.25)$$

Veličina  $[M]$  je dijagonalna matrica i naziva se modalna masa, a veličina  $[C]$ , također dijagonalna, se naziva modalna krutost.

Budući da su nove matrice mase i krutosti dijagonalne, vidimo da je transformacija koordinata  $\vec{x} = [B]\vec{q}$  potpuno raspregnula naš sustav jednadžbi. Sada je svaka jednadžba u (6.24) predstavlja jednadžbu gibanja sustava s jednim stupnjem slobode gibanja, koja je lako rješiva.

Jednom kada je određeno rješenje jednadžbe  $q_i$  (6.23), rješenje za fizikalne (osnovne) koordinate može se dobiti upotrebom jednadžbe za transformaciju koordinata (6.21).



Slika 33 - Prigušeni sustav s  $n$  stupnjeva slobode

Razmatramo li sustav koji sadrži prigušenje, moramo uzeti u obzir da postoje različiti tipovi prigušenja koji mogu biti zastupljeni u određenoj strukturi sustava. Neki od klasičnih tipova su: strukturno, viskozno i Kulonovo prigušenje. Teško je razlikovati koji je tip prigušenja u određenoj strukturi. Struktura može zadovoljavati karakteristike prigušenja koje su rezultat kombinacije svih gore navedenih, pa i više.

Uvodimo matricu prigušenja koju definiramo proporcionalno matrici masa i/ili matrici krutosti sustava (6.26),

$$[k] = \alpha [m] + \beta [c] \quad (6.26)$$

gdje je  $[k]$  matrica prigušenja, a  $\alpha$  i  $\beta$  su konstante.

Za ovu formu prigušenja transformacija koordinata, ranije razmotrena, koja dijagonalizira matrice masa i krutosti, će također dijagonalizirati i matricu prigušenja. Tako da kada imamo sustav sa proporcionalnim prigušenjem možemo transformirati taj sustav spregnutih jednadžbi gibanja u sustav raspregnutih jednadžbi gibanja sustava s jednim stupnjem slobode gibanja.

Ako pretpostavimo da imamo sustav sa prigušenjem kao što je prikazano na slici 33 onda su jednadžbe gibanja dane izrazom (6.27).

$$[m]\ddot{\vec{x}} + [k]\dot{\vec{x}} + [c]\vec{x} = \vec{F} \quad (6.27)$$

Prvo riješimo problem vlastitih vrijednosti za ne prigušeni sustav (6.28).

$$[m]\ddot{\vec{x}} + [c]\vec{x} = 0 \quad (6.28)$$

Iz toga dobijemo vlastite vrijednosti i forme vibriranja.

Konstruiramo nakon toga modalnu matricu  $[B]$  sustava (6.29).

$$[B] = [\vec{X}^{(1)} \quad \vec{X}^{(2)} \quad \dots \quad \vec{X}^{(n)}] \quad (6.29)$$

Nakon toga primijenimo transformaciju koordinata  $\vec{x} = [B]\vec{q}$  na jednadžbu (6.27) i dobijemo (6.30).

$$[m][B]\ddot{\vec{q}} + [k][B]\dot{\vec{q}} + [c][B]\vec{q} = \vec{F} \quad (6.30)$$

Ako pomnožimo (6.30) sa  $[B]^T$  dobijemo (6.31).

$$[B]^T [m][B]\ddot{\vec{q}} + [B]^T [k][B]\dot{\vec{q}} + [B]^T [c][B]\vec{q} = [B]^T \vec{F} \quad (6.31)$$

Zbog svojstva ortogonalnosti formi vibriranja je (6.25)

$$[B]^T [m][B] = [M]$$

$$[B]^T [c][B] = [C]$$

Zbog pretpostavljene forme matrice prigušenja (6.26)

$$[k] = \alpha[m] + \beta[c]$$

Uvrštenjem (6.25) i (6.26) u jednadžbu (6.31) dobijemo

$$[B]^T [k][B] = [B]^T [\alpha[m] + \beta[c]][B] = \alpha[B]^T [m][B] + \beta[B]^T [c][B] = \alpha[M] + \beta[C], \quad (6.32)$$

a iz (6.32) dobije se izraz (6.33) za modalnu matricu prigušenja, koja je isto dijagonalna.

$$[B]^T [k][B] = [K] \quad (6.33)$$

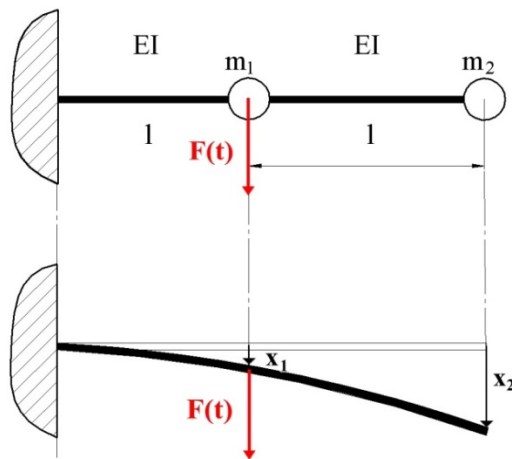
Sada izraz (6.31) postaje (6.34).

$$[M]\ddot{\vec{q}} + [K]\dot{\vec{q}} + [C]\vec{q} = [B]^T \vec{F} \quad (6.34)$$

Izraz (6.34) predstavlja sustav od  $n$  raspregnutih diferencijalnih jednadžbi gibanja prigušenog sustava s jednim stupnjem slobode gibanja koje se lagano rješavaju. Jednom kada je određeno rješenje jednadžbe  $q_i$ , rješenje za fizikalne koordinate može se dobiti upotrebom jednadžbe za transformaciju koordinata (6.21).

## 6.1. TESTIRANJE PROGRAMA ZA ODREĐIVANJE ODZIVA U MODALNIM KOORDINATAMA

Prije upotrebe računalnog programa za određivanje vibracijskog odziva stupa vjetroagregata koji se temelji na modalnoj analizi program je testiran na jednostavnom primjeru. Radi se o fleksijskom sustavu s 2 stupnja slobode gibanja koji je prikazan na slici 34. Uzeli smo taj jednostavan primjer zbog toga što se takav primjer može jednostavno riješiti numerički i onda na njemu provjeriti rad programa napravljenog u Matlab-u koji problem rješava preko modalne analize, jer ako se rezultati poklapaju analitički i preko modalne analize za dva stupnja slobode, onda program ispravno računa.



Zadano:

$$m_1 = 3 \text{ kg}$$

$$m_2 = 1 \text{ kg}$$

$$l = 0,1 \text{ m}$$

$$d = 0,01 \text{ m}$$

$$E = 2 \cdot 10^9 \text{ Pa}$$

$$\hat{F} = 1 \text{ N}$$

Slika 34 - Fleksijski vibracijski sistem s 2 stupnja slobode gibanja

Primjenom metode uplivnih koeficijenata dobije se:

$$x_1 = F(t)\alpha_{11} - 3m\ddot{x}_1\alpha_{11} - m\ddot{x}_2\alpha_{12}, \quad (6.35)$$

$$x_2 = F(t)\alpha_{21} - 3m\ddot{x}_1\alpha_{21} - m\ddot{x}_2\alpha_{22}. \quad (6.36)$$

Uz pretpostavku da je:

$$x_1 = \hat{x}_1 \sin \Omega t,$$

$$x_2 = \hat{x}_2 \sin \Omega t,$$

možemo jednačbe (6.35) i (6.36) zapisati u matričnom obliku dobijemo izraz (6.37).

$$\begin{bmatrix} (1 - 3m\Omega^2\alpha_{11}) & (-m\Omega^2\alpha_{12}) \\ (-3m\Omega^2\alpha_{21}) & (1 - \Omega^2\alpha_{22}) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \hat{F}\alpha_{11} \\ \hat{F}\alpha_{21} \end{Bmatrix} \quad (6.37)$$

Uplivni koeficijenti odrede se primjenom neke od metoda nauke o čvrstoći i iznose:

$$\alpha_{11} = \frac{l^3}{3EI}$$

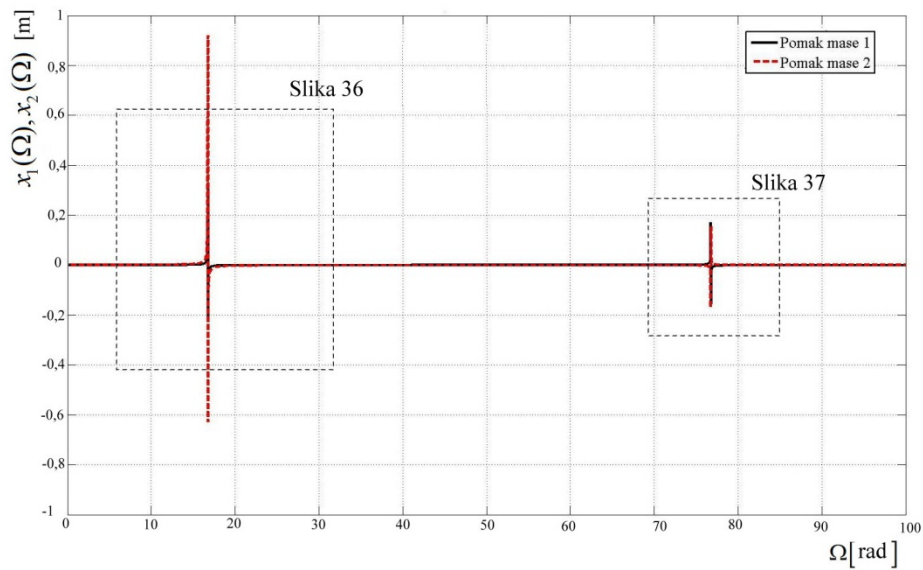
$$\alpha_{22} = \frac{8l^3}{3EI}$$

$$\alpha_{12} = \alpha_{21} = \frac{5l^3}{6EI} \quad (6.38)$$

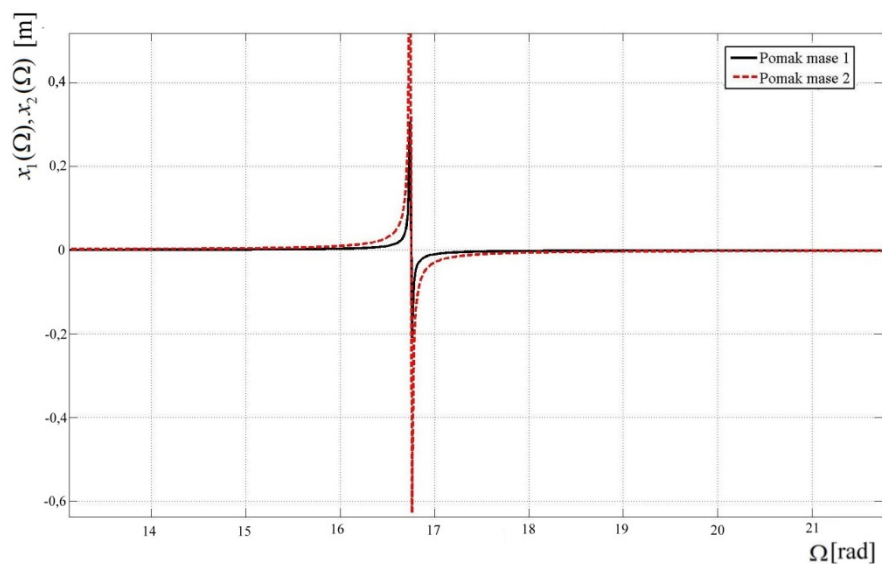
Rješenje tog sustava može se dobiti primjenom Cramerovog pravila

$$\hat{x}_1 = \frac{\Delta_1(\Omega)}{\Delta(\Omega)}$$

$$\hat{x}_2 = \frac{\Delta_2(\Omega)}{\Delta(\Omega)} \quad (6.39)$$

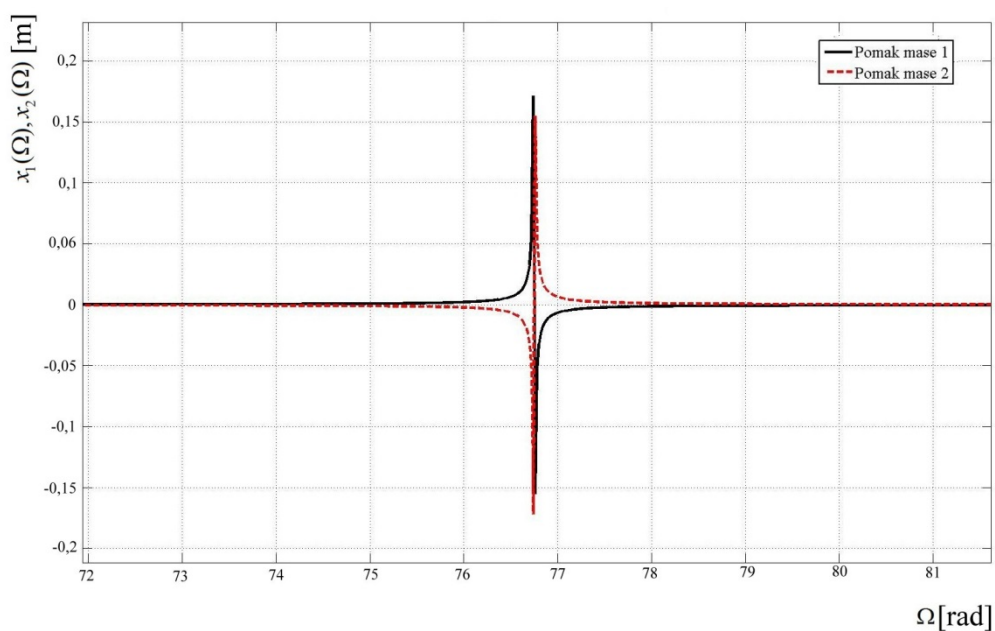


**Slika 35 - Pomaci mase 1 i mase 2 dobiveni rješavanjem  
jednadžbe (6.37) primjenom Cramerovog pravila (1)**



**Slika 36 - Pomaci mase 1 i mase 2 dobiveni rješavanjem  
jednadžbe (6.37) primjenom Cramerovog pravila (2)**

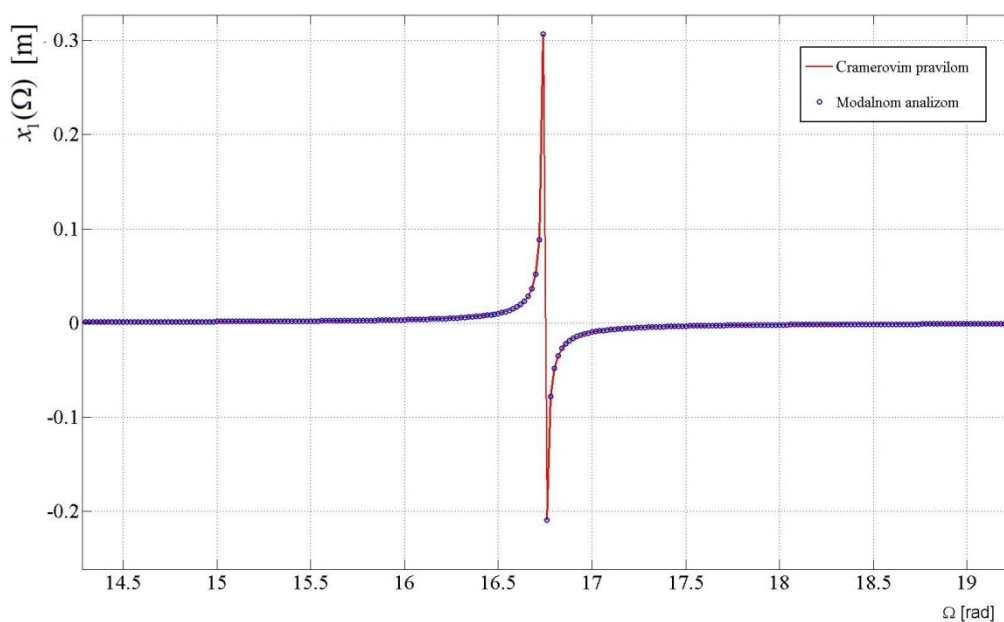




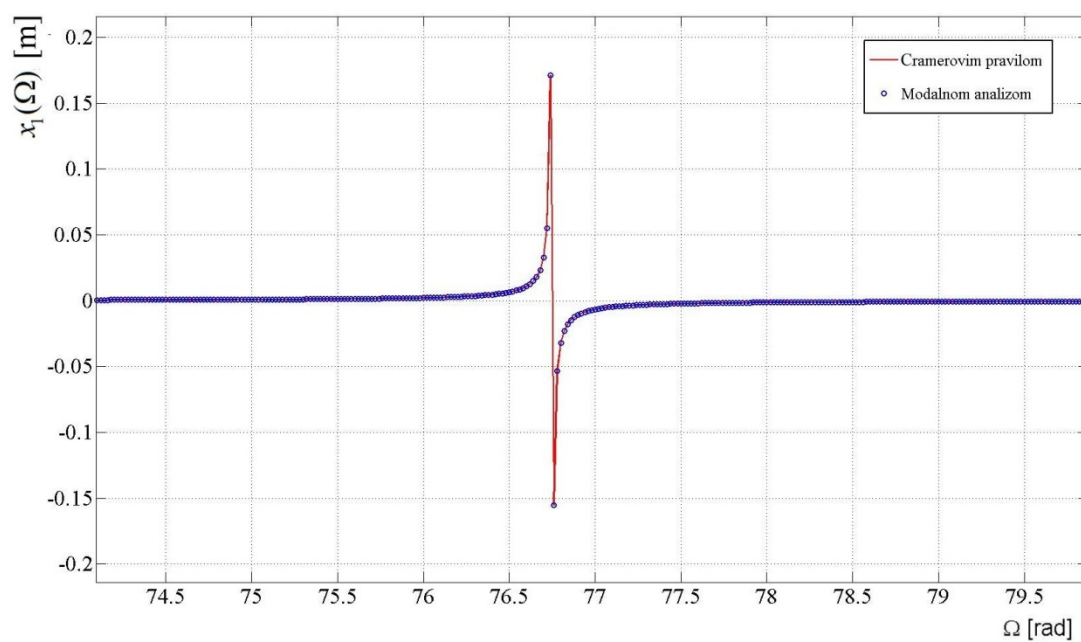
**Slika 37 - Pomaci mase 1 i mase 2 dobiveni rješavanjem  
jednadžbe (6.37) primjenom Cramerovog pravila (3)**

Rješavanje problema modalnom analizom:

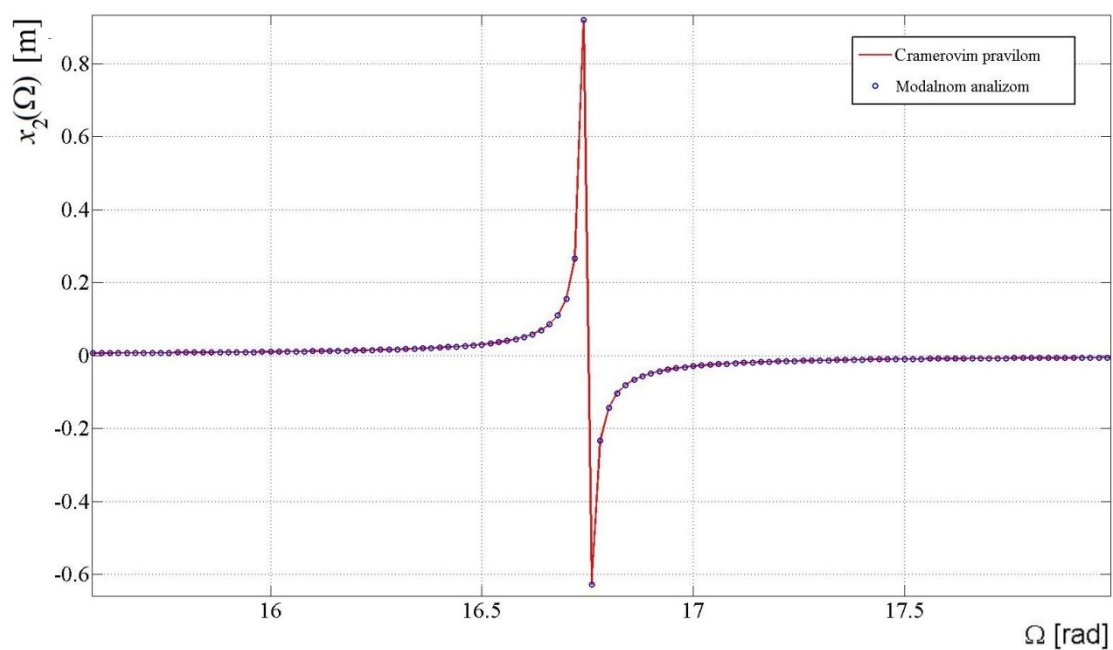
Program za rješavanje problema u modalnim koordinatama radi na način opisan u petom poglavlju. Usporedba rezultata dobivenih direktnim rješavanjem (6.37), tj. Cramerovim pravilom i korištenjem programa baziranog na modalnoj analizi je prikazano slikama 38,39,40 i 41.



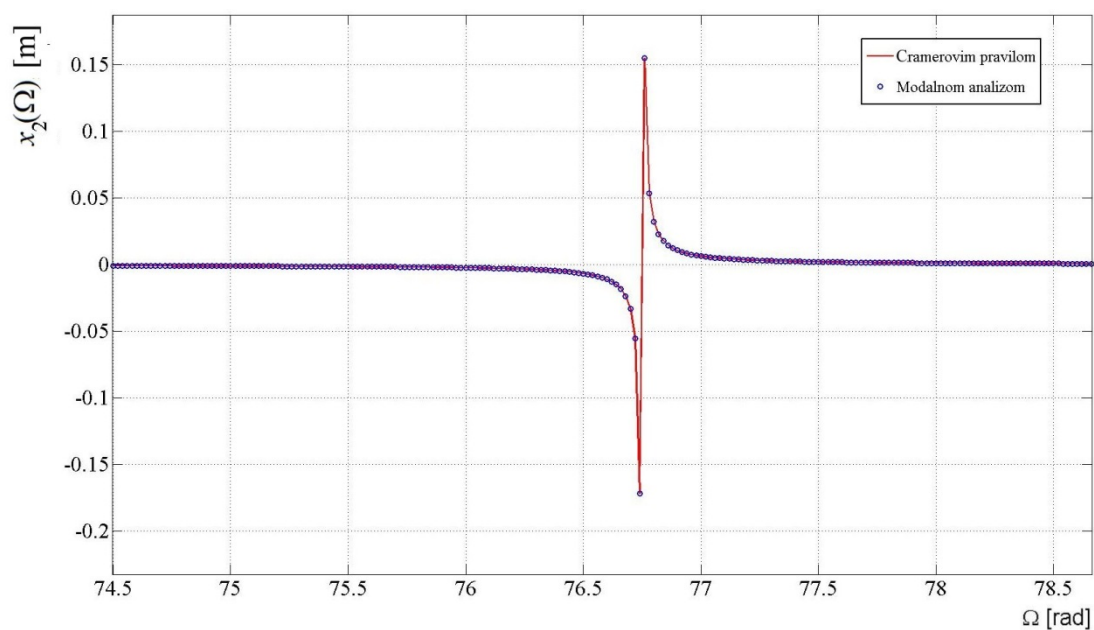
**Slika 38 – Usporedba rezultata za pomak mase 1 (1)**



Slika 39 - Usporedba rezultata za pomak mase 1 (2)



Slika 40 - Usporedba rezultata za pomak mase 2 (1)

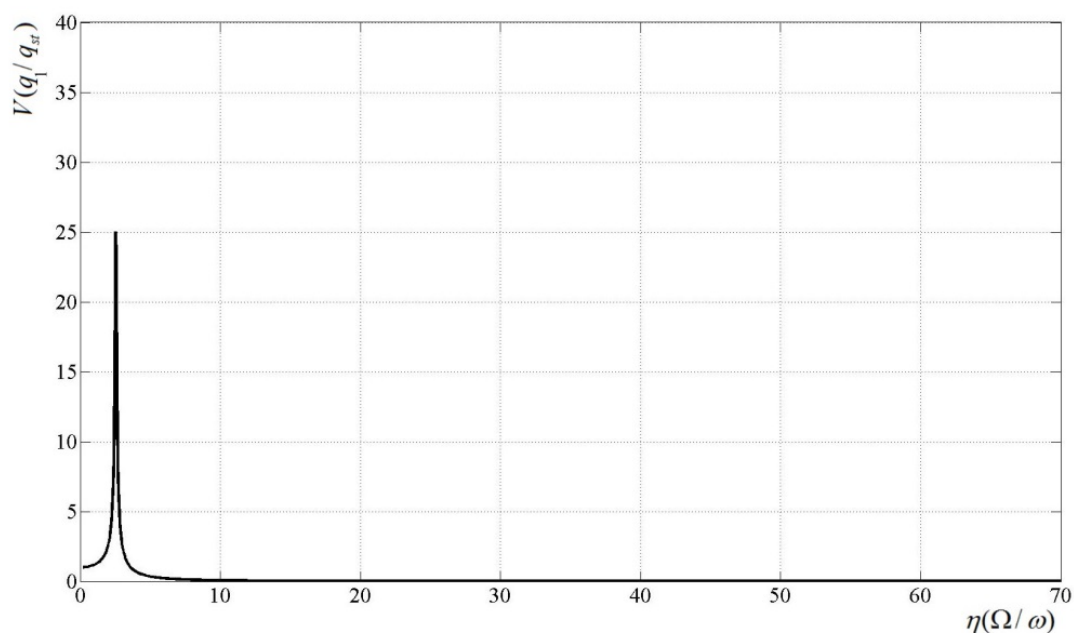


Slika 41 - Usporedba rezultata za pomak mase 2 (2)

Iz prikazanih rezultata vidi se da obje metode daju identične rezultate. Zbog toga dolazimo do zaključka da program radi ispravno i da ga se može primijeniti na model stupa vjetroagregata.

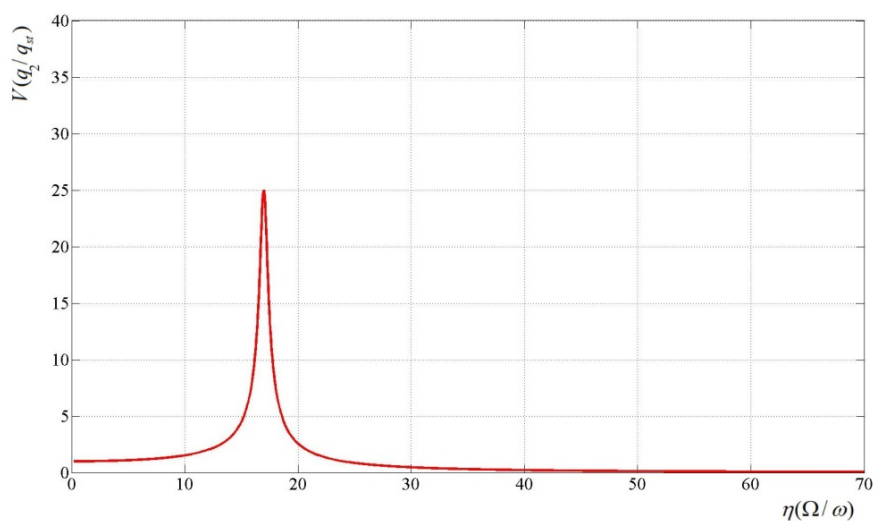
## 6.2. PRIMJENA PROGRAMA NA MODEL STUPA VJETROAGREGATA

S obzirom da smo se uvjerali da program ispravno računa, uvrstili smo matrice inercije i matrice krutosti koje smo prethodno već definirali na temelju dobivene dokumentacije da bi prikazali funkciju povećanja za određeni parametar prigušenja za prve tri modalne koordinate. Za parametar prigušenja je uzet  $\zeta = 0,02$  jer se takav uobičajeno koristi za čelične konstrukcije.



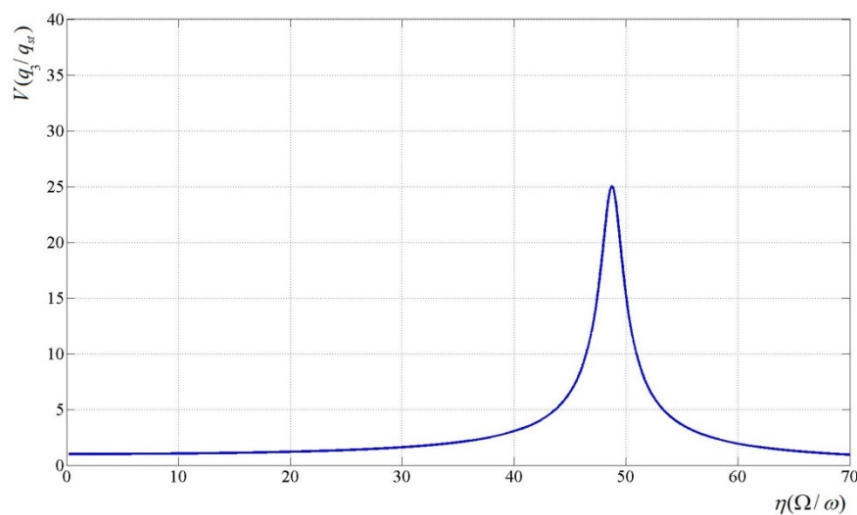
**Slika 42 - Funkcija povećanja za prvu modalnu koordinatu**

**pri vlastitoj frekvenciji od 0,40441 Hz uz  $\zeta = 0,02$**



**Slika 43 - Funkcija povećanja za drugu modalnu koordinatu**

**pri vlastitoj frekvenciji od 2,70255 Hz uz  $\zeta = 0,02$**



**Slika 44 - Funkcija povećanja za treću modalnu koordinatu**

**pri vlastitoj frekvenciji od 7,7599 Hz uz  $\zeta = 0,02$**

Podaci o stvarnom opterećenju razmatrane vjetroturbine nam nisu poznati, pa zbog toga nismo mogli odrediti odziv sustava. Uzbuda je u pravilu stohastičke prirode, odnosno nije harmonijska. Kada bi uzbuda u vremenskom području bila poznata onda bi se moglo primjenom neke od numeričkih metoda, npr. Runge-Kitta, dobiti odziv sustava za proizvoljan broj modalnih koordinata, a primjenom izraza (6.21) se dobije odziv sustava u fizikalnim (osnovnim) koordinatama.

## 7. ZAKLJUČAK

Tema ovog rada su vjetrom uzrokovane vibracije stupa vjetroatregata. Izrađen je metodom uplivnih koeficijenata model stupa vjetroatregata s čeličnim cijevnim stupom konusnog oblika, tj. numerički model kod kojega su se jednostavno analizirale vlastite frekvencije stupa vjetroatregata. Model je napravljen prema dobivenoj dokumentaciji.

Proračun stupa koji se sastoji od 25 podsegmenata proveden je u programskom paketu Matlab. Prikazane su prve tri vlastite frekvencije i njihove forme vibriranja. Kako se vjetroturbina osim od konusnih podsegmenata stupa sastoji i od gondole s vjetroturbinom i ostalom opremom, određene su vlastite frekvencije i glavne forme vibriranja stupa sa i bez mase i momenata inercije gondole i vjetroturbine kako bi se utvrdio utjecaj inercijskih karakteristika gondole i vjetroturbine na vlastite frekvencije vjetroatregata. Zaključeno je da najveći utjecaj na vrijednost vlastitih frekvencija vjetroatregata ima masa gondole i vjetroturbine.

Primjena metode modalne analize prikazana je na općenitom vibracijskom sustavu s  $n$  stupnjeva slobode gibanja, sa i bez prigušenja, te su prepoznate prednosti modalne analize, tj. transformacije problema u modalne koordinate, koja omogućuje rješavanje  $n$  nespregnutih jednadžbi s jednim stupnjem slobode gibanja umjesto rješavanja skupa  $n$  spregnutih jednadžbi s  $n$  stupnjeva slobode gibanja. Program temeljen na metodi modalne analize testiran je na fleksijskom sustavu s 2 stupnja slobode gibanja koji je riješen Cramerovim pravilom. Koristeći oba programa dobiveni su jednaki rezultati i zaključeno je da program radi.

Zbog nepoznavanja stvarnog opterećenja stupa nije se mogao odrediti realni odziv razmatranog stupa vjetroatregata, međutim ovaj numerički model, primjenom metode modalne analize, omogućuje određivanje vibracijskog odziva stupa u fizikalnim koordinatama vjetroatregata na koji djeluje proizvoljna (stohastička) uzbuda.

## LITERATURA

- [1] T. Kisiček; J. Galić; D. Kulić: Mogućnosti primjene armiranobetonskih stupova vjetroelektrana, 2012.
- [2] Mate Jelavić: Upravljanje vjetroatregatom s ciljem smanjenja dinamičkih opterećenja konstrukcije, doktorska disertacija, Zagreb, 2012.
- [3] ACCIONA Windpower AW-1500, technical data brochure
- [4] [www.canadianawareness.org](http://www.canadianawareness.org)
- [5] D. Pustaić, H. Wolf, Z. Tonković: Mehanika III: Uvod u analitičku mehaniku s osnovama teorije vibracija, FSB, Zagreb, 2005.
- [6] I. Alfrević: Nauka o čvrstoći I, FSB, Zagreb, 1995.
- [7] [www.vjetroelektrane.com](http://www.vjetroelektrane.com)
- [8] [www.pacwind.remnet.com](http://www.pacwind.remnet.com)
- [9] [en.wikipedia.org/wiki/wind\\_turbine](http://en.wikipedia.org/wiki/wind_turbine)
- [10] [www.energy-without-carbon.com](http://www.energy-without-carbon.com)
- [11] Ivo Alfrević: Linearna analiza konstrukcija, FSB, Zagreb, 1999.
- [12] Bojan Kraut: Strojarski priručnik, FSB, Zagreb, 1988.
- [13] Ivo Alfrević: Nauka o čvrstoći II, FSB, Zagreb, 1999.
- [14] Marko Tokić, Završni rad, FSB, Zagreb, 2013.
- [15] Milenko Stegić: Teorija vibracija, Zagreb 2009.
- [16] D. Forment: Analytical and Experimental Modal Analysis, University of Cincinnati
- [17] Singiresu S. Rao: Mechanical Vibrations, University of Miami, 2010.